Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

12. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СРАВНЕНИЯ

Основными условиями использования рассмотренных выше статистических критериев сравнения (t- и F-критерия) являются: а) анализируемый признак должен быть количественным, и б) распределение признака должно приближаться к нормальному типу. Так как эти критерии базируются на оценках параметров распределения совокупности (среднее значение, стандартное отклонение), то их называют *параметрическими*.

Достаточно часто исследователь ничего не знает о параметрах исследуемых совокупностей и виде их распределения: близки ли они к нормальному типу или какому-либо другому. Анализируемые выборки могут быть небольшого объема, дифференцированными на мелкие группы, или иметь переменные с 80% и более наблюдениями в одной из групп. Кроме того, могут быть выборки, у членов которых признак измеряется в рангах, а не в натуральных единицах. В таких случаях применение параметрических критериев может быть некорректным. Строго говоря, *нельзя применять критерии, основанные на предположении нормальности, к данным, не являющимся нормальными*.

В настоящей главе рассматриваются критерии сравнения, которые приложимы как к численно определенным, так и к порядковым совокупностям (поэтому их иногда называют *порядковыми*). Использование этих критериев не нуждается в каких-либо предположениях о характере распределения переменных. Так как их применение не требует оценки параметров распределений, то критерии называют *непараметрическими* (термин ввел Вольфовиц в 1942 г.), или - *свободными от параметров*, или *свободно распределенными* [11-14,33,104,106,110-113,127,134,135].

Непараметрические критерии обладают рядом преимуществ: (1) они не требуют предварительных предположений относительно вида исходного распределения, (2) для их вычисления не требуется большого объема данных, (3) они являются более *робастными* (применимыми в широком диапазоне условий), чем их параметрические аналоги.

Недостатки непараметрических критериев: 1) низкая статистическая мощность (менее чувствительные); 2) меньшая гибкость и 3) большая вероятность совершить ошибку II рода - отклонить нулевую гипотезу, когда она верна.

12.1. Обзор критериев

Если данные не являются нормально распределенными, а измерения, в лучшем случае, содержат ранжированную информацию, то вычисление обычных описательных статистик (среднего, стандартного отклонения) не слишком информативно. В непараметрической статистике применяют разнообразный набор *мер положения* (например, медиана, мода, квартили и т.д.) и *рассеяния* (например, ранг, квартильный размах и т.д.), позволяющий представить более «полную картину» данных.

По существу, для каждого параметрического критерия имеется, по крайней мере, один, непараметрический аналог. Эти критерии можно отнести к одной из следующих групп:

- критерии различия между независимыми выборками;
- критерии различия между зависимыми выборками;
- критерии зависимости между переменными.

Различия между независимыми выборками. Обычно, когда имеются две выборки (например, самцы и самки), которые необходимо сравнить относительно среднего значения некоторой изучаемой переменной, используют t-критерий для независимых выборок. Непараметрическими альтернативами этому критерию являются: критерий *Вальда-Вольфовица*, *U-критерий Манна-Уитни* и двух выборочный критерий *Колмогорова-Смирнова*.

При наличии нескольких групп в параметрической статистике используют дисперсионный анализ. Непараметрическими аналогами дисперсионного анализа являются: ранговый дисперсионный анализ *Краскела-Уоллиса* и *медианный тест*.

Различия между зависимыми выборками. Если необходимо сравнить две переменные, относящиеся к одной и той же выборке (например, живую массу животных до и после опыта), то обычно используют *парный t-критерий для зависимых выборок*. Альтернативными непараметрическими тестами являются: критерий *знаков* и критерий *Вилкоксона* парных сравнений.

Если рассматриваемые переменные по природе своей категориальные или являются категоризованными (т.е. представлены в виде частот попавших в определенные категории), то подходящим будет χ^2*-критерий Макнемара.*

Если рассматривается более двух переменных, относящихся к одной и той же выборке, то обычно используют дисперсионный анализ с повторными измерениями. Альтернативным непараметрическим методом является *ранговый дисперсионный анализ Фридмана* или *Q-критерий Кохрана* (Cochran). Последний применяют, если переменная измерена в номинальной шкале. *Q критерий Кохрана* используют также для оценки изменений долей.

Зависимости между переменными. Чтобы оценить зависимость (связь) между двумя переменными, обычно вычисляют коэффициент линейной корреляции Пирсона. Непараметрическими аналогами коэффициента корреляции являются статистики *Спирмена* (см. раздел 14.9), *тау Кендалла* и коэффициент *Гамма*.

Если две рассматриваемые переменные по природе своей категориальные, подходящими непараметрическими критериями для тестирования зависимости будут: χ^2, *Фи-коэффициент*, «*точный*» *критерий Фишера-Ирвина* (см. главу 13).

Для анализа зависимости между несколькими переменными используют так называемый *коэффициент конкордации Кендалла* (W). Этот тест можно применять для оценки согласованности мнений независимых экспертов (бонитеров), в частности, баллов, выставленных одному и тому же животному (см. раздел 14.10).

Каждая непараметрическая процедура имеет свои достоинства и свои недостатки. Так, двух выборочный критерий Колмогорова-Смирнова чувствителен не только к различию в положении двух распределений, например, к различиям средних, но и к форме распределения. Критерий Вилкоксона парных сравнений предполагает, что можно ранжировать различия между сравниваемыми наблюдениями. Если это не так, то лучше использовать критерий знаков. В общем, если результат исследования является важным, то целесообразно применить различные непараметрические тесты. Возможно, результаты проверки (разными тестами) будут различны. В таком случае следует попытаться понять, почему разные тесты дали разные результаты. С другой стороны, непараметрические тесты имеют меньшую статистическую мощность, чем их параметрические аналоги, и если важно обнаружить даже слабые отклонения (например, является ли кормовая добавка опасной для животных), то необходимо особенно внимательно выбирать статистику критерия.

Следует отметить, что в задаче сравнения двух выборок можно различать следующие частные случаи. Во-первых, можно поставить вопрос о том, различаются ли сравниваемые выборки по своей *центральной тенденции* (в качестве которой может выступать среднее значение, медиана и т.д.). Во-вторых, вопрос может состоять в том, различаются ли обе выборки *вообще* в каком-нибудь отношении (по центральной тенденции, рассеянию и т.п.). В-третьих, задачей может быть сравнение выборок, когда наблюдения попарно сопряжены.

Критерии первой группы обнаружат различие между двумя выборками только тогда, когда это различие касается центральной тенденции. Различия в прочих характеристиках игнорируются. Например, две выборки с различными вариансами, но с одинаковыми средними будут квалифицироваться критериями первой группы как неразличимыми. С другой стороны, критерии второй группы позволяют обнаружить различия между двумя выборками, в чем бы ни заключалось это различие, но зато исследователь не будет знать, в чем именно различаются выборки.

Критерии, предназначенные для решения одной и той же задачи, могут иметь разную статистическую мощность. Чем сложнее метод, тем выше мощность. Начинать анализ следует с простых критериев. Если значение статистики, вычисленной для данного критерия, окажется далеким от граничных значений (заключение о нулевой гипотезе является достаточно надежным), то этим результатом можно удовлетвориться. Если же значение статистики окажется близким к граничному значению, то результат нужно проверить более мощным методом. Ниже даны: *критерий Уайта* - для сравнения выборок по центральной тенденции, *серийный критерий* и *критерий Колмогорова-Смирнова* - для сравнения выборок по всем характеристикам, *критерий знаков* - для сравнения выборок с попарно сопряженными вариантами (по [112,113]), ранговый однофакторный дисперсионный анализ *Крускала-Уоллиса* и ранговый двухфакторный дисперсионный анализ *Фридмана* (по [134]).

12.2. Критерий Уайта

Критерий Уайта позволяет выявлять различия между рядами по показателю срединной (центральной) величины вариант. Этот метод прост, так как основан на сопоставлении величины переменной каждого животного, выраженной порядковым рангом. Однако этот критерий недостаточно точно выявляет различия между рядами и поэтому пригоден для тех случаев, когда не требуется более точное определение различий.

Пусть имеется два ряда значений, которые требуется сравнить: x_1, x_2, …, x_k и y_1, y_2, …, y_m, причем $k = n_x$ и $m = n_y$ могут быть неодинаковы. Объединим ряды и перепишем так, чтобы числа x_i и y_i были расположены в порядке возрастания

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, x_4, y_3, x_5\ x_6, y_4, y_5.$$

Если x_i и y_i представляют собой некоторые численные значения вариант, то различие обоих рядов по центральной тенденции будет определяться разностью средних значений:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{n_x} \quad \text{и} \quad \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{n_y}.$$

Когда численные значения вариант заменены их рангами (или когда вообще заданы только ранги вариант), то суммы значений в данных выражениях могут быть оценены суммами рангов соответствующих вариант, т.е. величинами

$$R_{x_1} + R_{x_2} + \ldots + R_{x_k} = T_x \quad \text{и} \quad R_{y_1} + R_{y_2} + \ldots + R_{y_k} = T_y.$$

В данном случае построение критерия различия упрощается в силу того, что все ранги, как правило, представляют собой числа натурального ряда, причем сумма их $T_x + T_y$ равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

где $n = n_x + n_y$. Это приводит к тому, что при заданных значениях n_x и n_y значимость различия между центрами обоих рядов полностью характеризуется одной только величиной T_x*. Таким образом, для каждой пары чисел n_x и n_y можно указать определенное критическое значение T_α, отвечающее выбранному уровню значимости α.

---

* Значение T_x однозначно определяет T_x / n_x, $T_y = n(n+1)/n - T_x$ и T_y / n_y, а тем самым и разность T_x / n_x - T_y / n_y. Варианса этой разности также однозначно определена, ибо она равна сумме варианс обоих членов. В данном случае увеличение вариансы рангов одного из них может произойти только за счет уменьшения вариансы рангов другого члена.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

Значения $T_{0,05}$ и $T_{0,01}$ приведены в табл. 10. С T_α должна сравниваться *меньшая* из сумм T_x и T_y. Обычно это сумма, соответствующая меньшему из чисел n_x и n_y.

10. Критические значения T_α для критерия различий Уайта

n_X	4		5		6		7		8		9		10	
n_Y	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
4	10		11		12	10	13	10	14	11	15	11	15	12
5	-	-	17	15	18	16	20	17	21	17	22	18	23	19
6	-	-	-	-	26	23	27	24	29	25	31	26	32	27
7	-	-	-	-	-	-	36	32	38	34	40	35	42	37
8	-	-	-	-	-	-	-	-	49	43	51	45	53	47
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	56	65	58
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	71

Если $T < T_{0,01}$, то нулевая гипотеза отвергается, т.е. различие между рядами может считаться статистически значимым. Если же $T \geq T_{0,05}$, то гипотеза H_0 остается в силе. При этом нужно тщательно следить за тем, чтобы сравниваемое число T было действительно меньшим из чисел T_x и T_y. Чтобы убедиться в этом, нужно после нахождения T вычислить

$$T' = \frac{n(n+1)}{2} - T.$$

Смысл данного критерия состоит в том, что в условиях нулевой гипотезы суммы T_x и T_y не должны слишком сильно отличаться от их нормального значения:

$$\frac{T_x + T_y}{2} = \frac{n(n+1)}{4},$$

так что меньшая из этих сумм не должна быть слишком малой.

Если же вычисленное T не будет больше или равно $T_{0,05}$ или меньше $T_{0,01}$, то вывода о различии или сходстве рядов сделать нельзя и следует использовать более точные методы.

Пример 12.1. Имеются две группы первотелок черно-пестрой (X) и холмогорской (Y) пород. В первой группе 9 животных, во второй - 5. Необходимо сопоставить эти группы по среднесуточному удою и определить статистическую значимость различий.

Данные по среднесуточному удою в каждой группе:

	Среднесуточный удой, кг									
x_i:	17,0	17,2	16,1	17,4	16,6	16,1	15,6	16,5	16,4	n_y=9
y_j:	15,8	16,2	15,7	15,1	15,2	-	-	-	-	n_x=5

Эти же данные, переписанные последовательно в сторону возрастания признака, с соответствующими рангами (R_x и R_y):

x_i:	-	-	15,5	15,6	-	-	16,1	16,1	-	16,4	16,6	17,0	17,2	17,4
y_j:	15,1	15,2	-	-	15,7	15,8	-	-	16,2	-	-	-	-	-
R_x:	-	-	3	4	-	-	7	8	-	10	11	12	13	14
R_y:	1	2	-	-	5	6	-	-	9	-	-	-	-	-

Суммы рангов по каждому ряду:

T_x=3+4+7+8+10+11+12+13+14=82;

T_y=1+2+5+6+9=23.

Проверка:

$$T_x + T_y = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 82 + 23 = \frac{14 \times 15}{2} = 105.$$

Из табл. 10 имеем для n_x=9, n_y=5 $T_{0,05}$=22, $T_{0,01}$=18. Так как $T > T_{0,05}$, гипотеза H_0 не отвергается. Следовательно, первотелки разных пород статистически не значимо отличаются по своей центральной тенденции.

Пример 12.2. Имеются данные по плодовитости чистопородных и полукровных свиноматок. В каждой группе по пять животных. Необходимо сопоставить эти группы по показателю плодовитости и определить статистическую значимость различий между группами.

Данные по плодовитости каждой группы следующие:

	Плодовитость, гол.					
Чистопородные (x)	8	10	9	12	7	n_x=5
Помесные (y)	11	13	14	11	14	n_y=5

Эти же данные, переписанные последовательно в сторону возрастания признака в каждом ряду и ранжированные (R_x и R_y):

x	7	8	9	10	-	-	12	-	-	-
y	-	-	-	-	11	11	-	13	14	14
R_x	1	2	3	4	-	-	7	-	-	-
R_y	-	-	-	-	5	6	-	8	9	10

Суммы рангов по каждому ряду:

T_x=1+2+3+4+7=17;

T_y=5+6+8+9+10=38.

Суммы рангов отличаются друг от друга. Статистическая значимость различий между рядами определяется по меньшему значению T, т.е. T_x=17 (n_x=5). По табл. 10 находим граничные значения при n_x=5 и n_y=5. Они составили: $T_{0,05}$=17 и $T_{0,01}$=15. Так как вычисленное T_x=17 совпадает с граничным $T_{0,05}$=17, то нулевая гипотеза остается в силе – различия между рядами статистически не значимы.

Для определения статистической значимости различий между центральными вариантами двух рядов можно пользоваться более точными критериями, например таким, как критерий X (ван дер Вардена).

12.3. Серийный критерий

Серийный критерий позволяет обнаружить различие между двумя выборками не только по центральной тенденции, но и по другим характеристикам. Нулевая гипотеза заключается в предположении, что ряды X и Y являются двумя выборками из одной генеральной совокупности. Если это так, то отдельные ранги (или значения) из обоих рядов должны чередоваться, когда эти два ряда объединены в один общий ряд.

Пусть, например, ранги (или значения) рядов X и Y будут: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$. Тогда расположение

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$$

будет противоречить нулевой гипотезе. Гораздо больше соответствует гипотезе H_0 расположение вида:

$$x_1, x_2, y_1, y_3, x_4, y_2, y_3, y_4, y_5, x_5, y_6.$$

Количественным показателем, по которому можно отличить оба эти распределения друг от друга, может служить число серий S, каждая из которых есть непрерывная последовательность наблюдений, принадлежащих к одному из двух рядов. Так, первое расположение состоит из двух серий:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; \quad y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6,$$

а второе расположение - из шести серий:

$$x_1, x_2; \quad y_1; \quad x_3, x_4; \quad y_2, y_3, y_4, y_5; \quad x_5; \quad y_6.$$

Серийный критерий различия между двумя совокупностями основан на том, что нулевая гипотеза отвергается, если число серий слишком мало (в данном случае применяется односторонний критерий). Методы теории вероятности позволяют вычислить вероятность того или иного числа серий при заданном числе наблюдений в каждом из рядов (нулевая гипотеза справедлива). Из обратного, можно указать число серий, отвечающих тому или иному уровню значимости (например, 0,05 или 0,01). В табл. 11 приводятся граничные значения числа серий при α=0,05. Приближенно можно считать, что $S_{0,01} = S_{0,05} - 2$.

Нулевая гипотеза принимается при $S \geq S_{0,05}$ и отвергается при $S < (S_{0,05} - 2)$.

11. Граничные значения числа серий $S_{0,05}$

n_x	n_y																
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
6	3	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	3	3	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	3	3	4	4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	3	4	4	5	5	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	3	4	5	5	6	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	3	4	5	5	6	6	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	4	4	5	6	6	7	7	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-
13	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	-	-	-	-	-	-	-
14	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	-	-	-	-	-	-
15	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	-	-	-	-	-
16	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11	-	-	-	-
17	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12	-	-	-
18	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	-	-
19	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	-
20	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15

Пример 12.3. Сравнить два ряда животных по переменным X и Y:

X_i	11,5	26,0	29,1	19,7	2,3	22,6	30,9	10,8	23,2	38,8	21,5
Y_i	18,4	15,5	25,2	16,9	24,0	13,3	17,9	13,2	-	-	-

Расположим все значения в один возрастающий ряд, помещая для ясности наблюдения по X_i и Y_i в разных строках:

X_i	2,3	10,8	11,5	-	-	-	-	-	-
Y_i	-	-	-	13,2	13,3	15,5	16,9	17,9	18,4

(продолжение)

19,7	21,5	22,6	23,2	-	-	26,0	29,1	30,9	38,8
-	-	-	-	24,0	25,2	-	-	-	-

Имеем пять серий (S=5). Из табл. 11 находим $S_{0,05}(11;8) = 6$. Так как S меньше, чем $S_{0,05}$, но не меньше, чем $(S_{0,05} - 2)$, вопрос о справедливости нулевой гипотезы остается открытым.

При малых объемах выборок серийный критерий оказывается недостаточно чувствительным. В таких случаях, если S равно S_α или отличается от S_α не более чем на единицу, следует проверить результат при помощи наиболее строгого критерия однородности Колмогорова (1933) и Смирнова (1939).

12.4. Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий Колмогорова-Смирнова* основан на сравнении рядов накопленных частот двух независимых выборок. Он включает в себя проверку всех видов различия распределений, в особенности различия средних положений (среднее значение, медиана), рассеяния, асимметрии и эксцесса, т.е. *любых* различий, *любых* параметров, без конкретизации каких именно.

Пусть имеется случайная выборка x_1, x_2, ..., x_n из совокупности с непрерывной функцией распределения F(x) и независимая случайная выборка y_1, y_2, ..., y_n из совокупности с непрерывной функцией распределения G(y). Проверяется гипотеза H_0: F(z)=G(z) для всех z (упорядоченных значений) против конкурирующей H_1: F(z)≠G(z) для некоторых z. При этом не уточняется, какова на самом деле общая форма F(z) и G(z) в H_0.

В двухвыборочном критерии Колмогорова-Смирнова используют статистику

$$D = \max|f_i(x) - f_i(y)|,$$

которая является наибольшей по абсолютной величине разностью между накопленными частотами рядов, $f_i(x)$ и $f_i(y)$, расположенных в порядке возрастания.

Нулевую гипотезу отвергают, если эта максимальная разность окажется слишком большой. Значение D, которое должно считаться «слишком большим», зависит от принятого уровня значимости, α, и от объема выборок, n_x и n_y. В качестве критического D принимают

$$D_\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\alpha} \times \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}.$$

Если обозначить

$$\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\alpha}} = \lambda_\alpha,$$

---

* Строго говоря, словосочетание «критерий Колмогорова-Смирнова» некорректно, т.к. эти два статистика никогда не печатались вместе и не изучали один и тот же критерий. Корректно сочетание «критерий типа Колмогорова-Смирнова», применяемое для обозначения критериев, основанных на использовании *супремума* (максимального элемента) функций от эмпирического процесса.

то тогда

$$D_\alpha = \lambda_\alpha \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} = \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}.$$

Вместо сравнения эмпирического D с D_α можно сравнивать

$$\lambda^2 = D^2 \frac{n_x n_y}{n_x + n_y}$$

с λ_α^2, причем

$$\lambda_{0,05}^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{0,05} = \frac{1}{2}\ln 40 = 1,84,$$

$$\lambda_{0,01}^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{0,01} = \frac{1}{2}\ln 200 = 2,65.$$

Гипотезу H_0 отвергают, если $\lambda^2 \geq \lambda_{0,01}^2$, и принимают на уровне значимости 0,05, если $\lambda^2 < \lambda_{0,05}^2$.

Пример 12.4. В табл. 12 в первом столбце дан упорядоченный ряд *всех* значений переменных x_i и y_i из **примера 12.3.**

12. Расчет абсолютной разности $d_i = |f_i(x) - f_i(y)|$

x_i, y_i	$n_i(x)$	$n_i(y)$	$p_i(x)$	$p_i(y)$	$f_i(x)$	$f_i(y)$	$\|d_i\|$
2,3	1	0	1	0	0,091	0,000	0,091
10,8	1	0	2	0	0,182	0,000	0,182
11,5	1	0	3	0	0,273	0,000	0,273
13,2	0	1	3	1	0,273	0,125	0,148
13,3	0	1	3	2	0,273	0,250	0,023
15,5	0	1	3	3	0,273	0,375	0,102
16,9	0	1	3	4	0,273	0,500	0,227
17,9	0	1	3	5	0,273	0,625	0,352
18,4	0	1	3	6	0,273	0,750	**0,477**
19,7	1	0	4	6	0,364	0,750	0,386
21,5	1	0	5	6	0,455	0,750	0,295
22,6	1	0	6	6	0,546	0,750	0,204
23,2	1	0	7	6	0,636	0,750	0,114
24,0	0	1	7	7	0,636	0,875	0,239
25,2	0	1	7	8	0,636	1,000	0,364
26,1	1	0	8	8	0,727	1,000	0,273
29,1	1	0	9	8	0,818	1,000	0,182
30,9	1	0	10	8	0,910	1,000	0,090
38,8	1	0	11	8	1,000	1,000	0,000
-	11	8	-	-	-	-	-

В столбцах 2 и 3 показано число животных по каждому значению, а в столбцах 4 и 5 - число животных с накоплением. В столбцах 6 и 7 даны накопленные частоты, рассчитанные по $f_i(x) = p_i(x)/n_x$ и $f_i(y) = p_i(y)/n_y$. В столбце 8 находим максимальное значение $|d_i|$:

$$D = 0{,}477\,.$$

Расчет λ^2:

$$\lambda^2 = D^2 \frac{n_x n_y}{n_x + n_y} = 0{,}477^2 \frac{11 \times 8}{11 + 8} = 1{,}06\,.$$

Так как $\lambda^2 = 1{,}06 < \lambda^2_{0,05} = 1{,}84$, то гипотезу H_0 следует принять на уровне значимости 0,05 и, следовательно, можно считать, что значения признака описываются одной и той же функцией распределения.

Нулевая гипотеза однородности говорит об идентичности двух функций распределения. Принятие этой гипотезы автоматически означает и равенство всех соответствующих параметров этих распределений. Однако отклонение нулевой гипотезы и принятие альтернативной гипотезы не отвечает на вопрос о том, *какие именно параметры не равны в сравниваемых распределениях*.

Критерий Колмогорова-Смирнова может быть использован для проверки гипотезы об *однородности выборок* - т.е. гипотезы о том, что выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности.

12.5. Критерий знаков

При сопряженных наблюдениях двух рядов удобно пользоваться методом определения различий между рядами, называемым *критерием знаков*. Этот метод особенно ценен для сравнения таких групп, когда в опытную и контрольную группу включены объекты, существенно между собой различающиеся. Группы, в целом, неоднородны, но каждому члену контрольной группы соответствует аналог в опытной группе (методика «спаренных» вариант). Например, в опыт могут быть включены самцы и самки, т.е. группы получаются неоднородными по полу животных, но каждой самке контрольной группы соответствует самка-аналог в опытной группе и, соответственно, каждому самцу контрольной группы есть самец-аналог в опытной.

Контролем может служить сам подопытный объект - состояние животного до опыта и после опыта. Сопряженность вариант опытной и контрольной выборок в этом случае очевидна.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

Пример 12.5. Пусть требуется показать, что предлагаемый лечебный препарат не меняет состава крови (в частности, числа лейкоцитов). В опыте участвовало 10 животных. Анализ дал следующие результаты (числа выражают отношение числа лейкоцитов в опыте к таковому в норме):

0,97; 1,05; 1,09; 0,88; 1,01; 1,14; 1,03; 1,07; 0,94; 1,02.

В семи случаях число лейкоцитов увеличилось (отметим знаком «+»), а в трех случаях – уменьшилось (припишем знак «-»). Можно полагать, что применение изучаемого препарата ведет в большинстве случаев к увеличению числа лейкоцитов в крови.

Однако такое заключение было бы неверным. Содержание лейкоцитов в крови подвержено случайным вариациям во времени. При этом отклонения в ту или иную стороны равновероятны. Поэтому следует ожидать, что в среднем будут одинаково часто происходить отклонения числа лейкоцитов, как в сторону увеличения, так и сторону уменьшения (одинаковое число «+» и «-»). Но слово «в среднем» имеет тот смысл, что такая тенденция будет проявляться лишь при достаточно большом числе проб. Если же проб сделано мало, то могут иметь место сколь угодно большие отклонения от этой тенденции. Увеличение содержания лейкоцитов могло наблюдаться во всех десяти пробах. Правда, такой результат имеет малую вероятность ($1/2^{10}=1/1024\approx 0,001$).

13. Граничные значения числа знаков Z (менее часто встречающихся) для определения значимости различий между рядами с парными вариантами

n	α		n	α		n	α		n	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
8	1	0	31	10	7	54	20	17	77	30	26
9	2	0	32	10	8	55	20	17	78	30	27
10	2	0	33	11	8	56	21	17	79	31	27
11	2	0	34	11	9	57	21	18	80	31	28
12	3	1	35	12	9	58	22	18	81	32	28
13	3	1	36	12	9	59	22	19	82	32	28
14	3	1	37	13	10	60	22	19	83	33	29
15	4	2	38	13	10	61	23	20	84	33	29
16	4	2	39	13	11	62	23	20	85	33	30
17	5	2	40	14	11	63	24	20	86	34	30
18	5	3	41	14	11	64	24	21	87	34	31
19	5	3	42	15	12	65	25	21	88	35	31
20	6	3	43	15	12	66	25	22	89	35	31
21	6	4	44	16	13	67	26	22	90	36	32
22	6	4	45	16	13	68	26	22	91	36	32
23	7	4	46	16	13	69	26	23	92	37	33
24	7	5	47	17	14	70	27	23	93	37	33
25	8	5	48	17	14	71	27	24	94	38	34
26	8	6	49	18	15	72	28	24	95	-38	34
27	8	6	50	18	15	73	28	25	96	38	34
28	9	6	51	19	15	74	29	25	97	39	35
29	9	7	52	19	16	75	29	25	98	39	35
30	10	7	53	19	16	76	29	26	≥99	40	36

Примечание. Гипотезу H_0 принимают при $Z \geq Z_{0,05}$ и отвергают при $Z \leq Z_{0,01}$.

Допустим, что тот или иной результат является случайным, если вероятность его равна или больше 0,05 и значимо неслучайным, если его вероятность меньше 0,01. Из закона биномиального распределения (с учетом того, что нулевая гипотеза соответствует условию разной вероятности «+» и «-») можно вычислить, насколько соотношение численности альтернатив может отклоняться от ожидаемого соотношения 1:1, чтобы вероятность его была бы не менее 0,05 или 0,01.

Соответствующие граничные значения даны в табл. 13 для разных объемов выборки (при наличии сопряженных пар $n_x=n_y=n$).

В табл. 13 помещены граничные значения для числа знаков Z, встречающихся менее часто. Если при сравнении двух рядов значения в каких-либо парах совпадают (нет ни плюсов, ни минусов), то эти пары исключаются из рассмотрения; соответственно уменьшается n.

В примере 12.5 n=10 и Z=3. Из табл. 13 находим $Z_{0,05;10}=2$. Так как $Z>Z_{0,05}$, то нулевая гипотеза остается в силе – результат (семь плюсов и три минуса) мог получиться случайно.

Если бы опыт был поставлен на 100 животных и получилось бы то же соотношение (70 плюсов и 30 минусов), то нулевую гипотезу следовало бы отвергнуть.

Пример 12.6. Требуется определить статистическую значимость различия в яйценоскости кур-дочерей и кур-матерей. Имелись следующие данные:

Пары	Яйценоскость за год (шт.)										
Матери(М)	170	150	190	160	130	200	180	150	170	200	140
Дочери(Д)	190	200	180	180	160	190	190	160	180	210	160
Разница (Д-М)	+20	+50	-10	+20	+30	-10	+10	+10	+10	+10	+20

Число сравниваемых пар равно n=11. У девяти пар яйценоскость дочерей превышала таковую матерей (девять плюсов) и у двух пар была ниже материнской (два минуса), т.е. Z=2.

Из табл. 13 находим $Z_{0,05;11}=2$. Так как $Z=Z_{0,05}$, то нулевая гипотеза остается в силе - между сопоставляемыми рядами нет статистически значимых различий. Полученное соотношение положительных и отрицательных отклонение яйценоскости дочерей от таковой матерей (9 к 2) является результатом случайности.

При применении критерия знаков используется не вся информация, содержащаяся в экспериментальных данных. В частности, учитываются только знаки разностей, но не их величины. Поэтому критерий знаков недостаточно чувствительный. Бóльшей мощностью обладает критерий Вилкоксона (Wilcoxon). Он учитывает не только знак разности между сопряженными членами ряда, но и величину этой разности.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

12.6. Критерий Крускала-Уоллиса

Для сравнения параметров положения *нескольких* совокупностей, имеющих неизвестное распределение, используется *ранговый* однофакторный дисперсионный анализ, в частности, критерий Крускала-Уоллиса (Kruskal-Wallis)), эффективность которого сравнима с эффективностью F-критерия.

Допустим, что в эксперименте изучается влияние одного фактора на признак. Различным уровням фактора, *способам обработки*, оказывающего влияние на конечный результат эксперимента, соответствуют различные выборки. Следовательно, k выборок порождаются k различными способами обработки (например, способам содержания животных).

Пусть имеется k независимых выборок:

$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}$ - 1-ая выборка,

$x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}$ - 2-ая выборка,

$\vdots$

$x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k}$ - k-ая выборка.

Сначала упорядочим все величины x_{ij} от меньшего к большему. Затем обозначим через r_{ij} ранг числа x_{ij} во всей совокупности наблюдений. Тогда вместо исходных выборок будем иметь выборки рангов:

$r_{11}, r_{12}, ..., r_{1n_1}$ - 1-ая выборка,

$r_{21}, r_{22}, ..., r_{2n_2}$ - 2-ая выборка,

$\vdots$

$r_{k1}, r_{k2}, ..., r_{kn_k}$ - k-ая выборка.

В качестве гипотезы H_0 рассмотрим гипотезу о том, что все исходные выборки взяты из генеральных совокупностей с одинаковыми распределениями (гипотеза однородности). Проверяется гипотеза:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_k = \tau$$

о равенстве параметров положения этих k совокупностей. Альтернатива, $H_1 : \tau_1 \neq \tau$, подразумевает, что, по крайней мере, одна из совокупностей отличается от всех других параметром положения.

Для того, чтобы проверить, гипотезу H_0 необходимо взять некую статистику, зависящую от рангов таким образом, чтобы распределение этой статистики при выполнении гипотезы H_0 значимо отличалось от ее распределения при альтернативе.

В качестве меры различия параметров положения в критерии Крускала-Уоллиса используют статистику

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{R}_i - \frac{N+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k} n_i\,\overline{R}_i^2 - 3(N+1) =$$

$$= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

где k - число выборок;

n_i - число наблюдений в i-ой выборке;

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ - общее число наблюдений;

$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$ - сумма рангов в i-ой выборке;

$\overline{R}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} = R_i / n_i$ - средний ранг в i-ой выборке;

Полученная величина будет примерно распределена как χ^2 с числом степеней свободы $df = k-1$. Поэтому при выполнении гипотезы H_0 статистика критерия не должна принимать слишком большие значения, а при значимом нарушении гипотезы H_0 большие значения статистики H становятся более вероятными. Следовательно, критическая область для гипотезы H_0 имеет вид $\{H > H_\alpha\}$, где критическая точка (значение) H_α соответствует уровню значимости α. В табл. 14 даны значения $H_{0,1}$, $H_{0,05}$ и $H_{0,01}$ для выборок малого объема. Для выборок большого объема используют распределение χ^2 с (k-1) степенями свободы (см. приложение А табл. А.9).

Если в исходных выборках есть совпадающие значения x_{ij}, то при ранжировании используют средние ранги. Если совпадений много, то рассчитывают модифицированную статистику H:

$$H' = \frac{H}{1 - \frac{1}{N^3 - N}\sum_{t=1}^{g}(c_t^3 - c_t)},$$

где g - число групп совпадений; c_t -число совпадающих наблюдений в t-ой группе.

14. Критические значения H_α для критерия Крускала-Уоллиса

n_1	n_2	n_3	α			n_1	n_2	n_3	α		
			0,10	0,05	0,01				0,10	0,05	0,01
2	2	2	4,57	-	-	5	3	1	4,01	4,96	-
3	2	2	4,50	4,71	-	5	3	2	4,65	5,25	6,82
3	3	2	4,55	5,36	-	5	3	3	4,53	5,34	6,98
3	3	3	4,62	5,60	7,20	5	4	1	3,98	4,98	6,95
4	2	2	4,37	5,33	-	5	4	2	4,54	5,27	7,11
4	3	2	4,51	5,44	6,44	5	4	3	4,54	5,63	7,44
4	3	3	4,70	5,72	6,74	5	4	4	4,61	5,61	7,76
4	4	1	4,16	4,96	6,66	5	5	1	4,10	5,12	7,30
4	4	2	4,55	5,45	7,03	5	5	2	4,50	5,33	7,33
4	4	3	4,54	5,59	7,14	5	5	3	4,54	5,70	7,57
4	4	4	4,65	5,69	7,65	5	5	4	4,52	5,66	7,82
5	2	2	4,37	5,16	6,53	5	5	5	4,56	5,78	7,98

Пример 12.7. Имеем данные по живой массе трех групп поросят, получавших три рациона:

$x_{11} = 57{,}7;\ x_{12} = 63{,}8;\ x_{13} = 55{,}0;\ x_{14} = 59{,}1;\ x_{15} = 68{,}1$ - 1-я выборка;

$x_{21} = 58{,}3;\ x_{22} = 65{,}4;\ x_{23} = 61{,}8;\ x_{24} = 54{,}5;\ x_{25} = 56{,}8$ - 2-я выборка;

$x_{31} = 69{,}5;\ x_{32} = 67{,}2;\ x_{33} = 61{,}9$ - 3-я выборка.

Ранжирование и присвоение рангов:

x_{24}	x_{13}	x_{25}	x_{11}	x_{21}	x_{14}	x_{23}	x_{33}	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{15}	x_{31}
54,5	55,0	56,8	57,7	58,3	59,1	61,8	61,9	63,8	65,4	67,2	68,1	69,5
r_{24}	r_{13}	r_{25}	r_{11}	r_{21}	r_{14}	r_{23}	r_{33}	r_{12}	r_{22}	r_{32}	r_{15}	r_{31}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Суммы рангов и средние ранги по выборкам:

$R_1 = 2 + 4 + 6 + 9 + 12 = 33,\quad \overline{R}_1 = 33/5 = 6{,}6;$

$R_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26,\quad \overline{R}_2 = 26/5 = 5{,}2;$

$R_3 = 8 + 11 + 13 = 32,\quad \overline{R}_3 = 32/3 \approx 10{,}7.$

H-статистика:

$$H = \frac{12}{13(13+1)}\left(\frac{33^2}{5} + \frac{26^2}{5} + \frac{32^2}{3}\right) - 3(13+1) = 3{,}78.$$

Из табл. 14 находим критическое значение $H_{0,05} = 5{,}7$, соответствующее α=0,05 и объемом выборок n_1=5, n_2=5, n_3=3. Так как H<5,7, то при 5% уровне значимости гипотезу H_0 нельзя отвергнуть. Полученные данные свидетельствуют в пользу гипотезы однородности выборок, т.е. значимых различий по живой массе при кормлении поросят тремя рационами не обнаружено.

Табл. 14 составлена таким образом, что всегда $n_1 \geq n_2 \geq n_3$. Это условие не ограничивает общности, так как переобозначением всегда можно добиться выполнения этого неравенства.

12.7. Критерий Фридмана

Критерий Фридмана (Friedman) - это непараметрический аналог дисперсионного анализа повторных измерений; применяется для анализа повторных измерений, связанных с одним и тем же животным. Может применяться и в случае, когда вместо отдельных животных сравниваются однородные группы (объекты).

Логика критерия проста. Каждое животное (объект) ровно один раз подвергается каждому методу *обработки** (или наблюдается в фиксированные моменты времени). Результаты наблюдения у каждого животного (объекта) упорядочиваются. Причем отдельно упорядочиваются значения у каждого животного (объекта) независимо от всех остальных. Таким образом, получается столько упорядоченных рядов (блоков), сколько животных (объектов) участвует в исследовании. Далее, для каждого метода обработки (уровня главного фактора) вычисляется сумма рангов. Если разброс сумм велик - различия статистически значимы.

Для применения этого критерия столбцы таблицы данных должны отражать различные значения главного фактора (обработки), а строки (блоки) соответствуют повторным измерениям одного и того же животного (объекта).

---

* В статистике принята терминология, по которой уровни главного фактора называют *обработками*, а уровни мешающего фактора - блоками.

Пусть главный фактор принимает k различных значений, а мешающий фактор - n различных значений. Тогда таблица данных будет иметь следующий вид:

Блоки	Обработки			
	1	2	…	k
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nk}

С помощью критерия Фридмана проверяют нулевую гипотезу о том, что влияние главного фактора (обработки) не является значимым. Альтернативная гипотеза, H_1, заключается в том, что гипотеза H_0 неверна.

Если гипотеза H_0 справедлива, то наблюдения внутри каждой строки таблицы данных распределены одинаково, при этом распределения наблюдений внутри любого столбца могут быть различными, если влияние мешающего фактора значимо.

Процедура состоит в упорядочивании (ранжировании) значений в каждой строке (ранги в каждой строке принимают значения от 1 до k - число сравниваемых обработок). Так, наблюдения первой строки получат ранги $r_{11}, ..., r_{1k}$, а наблюдения второй строки получат ранги $r_{21}, ..., r_{2k}$ и т.д., в результате чего наблюдение x_{ij} получит ранг r_{ij}. Значения r_{ij} изменяются от 1 до k, а соответствующая строка рангов представляет некоторую перестановку чисел 1, 2, ..., k (предполагается, что среди элементов, стоящих в одной строке таблицы данных нет совпадающих, в противном случае следует использовать средние ранги).

F-критерий Фридмана имеет вид:

$$F = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{n} r_{ij} - \frac{n(k+1)}{2} \right]^2 =$$

$$= \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \right)^2 - 3nk(k+1).$$

При справедливости гипотезы H_0 слагаемые в выражении для F с большой вероятностью невелики, и, следовательно, значение F сравнительно мало. Нарушение гипотезы H_0 приводит к возрастанию статистики Фридмана.

Критическая область для гипотезы H_0 при заданных n и k имеет вид $\{F \geq F_\alpha\}$, где критическая точка F_α соответствует уровню значимости α. В табл. 15 даны значения, $F_{0,05}$, $F_{0,02}$, $F_{0,01}$, $F_{0,005}$ и $F_{0,001}$ для выборок малого объема. При больших значениях n статистика Фридмана приближенно распределена по закону χ^2 с (k-1) степенями свободы (см. приложение А табл. А.9).

15. Критические значения F_α для критерия Фридмана

k	n	α				
		0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
3	3	6,000	-		-	-
3	4	6,500	8,000	8,000	8,000	-
3	5	6,400	6,400	8,400	10,000	10,000
3	6	7,000	8,333	9,000	10,333	12,000
3	7	7,143	8,000	8,857	10,286	12,286
3	8	6,250	7,750	9,000	9,750	12,250
3	9	6,222	8,000	8,667	10,667	12,667
4	2	6,000	-	-	-	-
4	3	7,400	8,200	9,000	9,000	-
4	4	7,800	8,400	9,600	10,200	11,100

Если $F \geq F_\alpha$, для выбранного уровня значимости и заданных n и k (или соответствующего числа степеней свобод), то нулевую гипотезу отклоняют.

Пример 12.8. Имеем данные по содержанию фосфора (мг/100г) в каждом из четырех органов у некоторых животных трех пород:

	Порода1		Порода2		Порода3	
	мг/100г	ранг	мг/100г	ранг	мг/100г	ранг
Сердце	86,7	2	88,4	3	81,2	1
Легкие	102,7	2	108,1	3	99,8	1
Печень	204,6	2	213,2	3	201,2	1
Почки	184,6	3	183,4	2	179,0	1
Σ рангов	-	9	-	11	-	4

В этом примере k=3, n=4,

$$F = \frac{12}{4 \times 3(3+1)}(9^2 + 11^2 + 4^2) - 3 \times 4(3+1) = 6{,}5.$$

По табл. 15 при n=4, k=3, α=0,05 критическая точка F_α=6,5. Неравенство $F \geq F_\alpha$ выполняется. Следовательно, при 5% уровне значимости гипотезу H_0 следует отклонить. Таким образом, содержание фосфора у животных трех пород различно.

Несмотря на положительные стороны непараметрических критериев и простоту их вычисления, следует помнить, что разрешающая способность их ниже параметрических. Поэтому использование непараметрических методов наиболее целесообразно в таких исследованиях, когда достаточна менее точная информация о статистической значимости результатов.

Непараметрические методы наиболее приемлемы для небольших выборок. Если данных много ($n>100$), то не имеет смысла использовать непараметрические критерии. В больших по объему выборках выборочные средние подчиняются нормальному закону, даже если исходная переменная не является нормальной или измерена с погрешностью. Таким образом, параметрические методы, являющиеся более чувствительными (имеют большую статистическую мощность), всегда подходят для больших выборок.

Если объем выборки мал, то до того, как использовать какой-либо параметрический тест, следует проверить гипотезу на нормальность распределения. Существует большое количество методов проверки нормальности распределения, но ни один из них не является универсальным. Одни методы могут подтверждать статистическую гипотезу о нормальности распределения, другие - отвергать эту гипотезу. Поэтому рекомендуют использовать несколько методов, чтобы получить как можно менее противоречивые результаты.

Проводились специальные исследования, чтобы оценить, насколько тесты, основанные на предположении нормальности, чувствительны к различным нарушениям этого предположения. Общий вывод: последствия нарушения предположения нормальности менее тяжелы, чем первоначально предполагалось[*]. Этот вывод не означает, что предположения нормальности можно игнорировать. Он лишь подтверждает возможность более широкого использования в исследованиях методов, подразумевающих нормальное распределение анализируемых переменных.

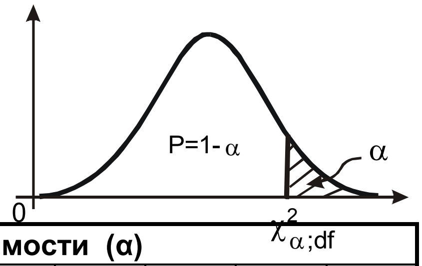
---

[*] Ю.Н. Благовещенский и В.П. Самсонова [11] утверждают, что при объемах выборок ≥10 и если коэффициент изменчивости не превышает 50%, то можно не беспокоиться о типе распределения, поскольку в таких условиях гипотезу о нормальности все равно опровергнуть практически невозможно.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

Приложение

А.9. Критические значения χ^2-распределения Пирсона



df	Уровень значимости (α)									
	0,99	**0,95**	**0,90**	**0,75**	**0,50**	**0,25**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,010**
1	…	…	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	***18,31***	20,48	23,21
11	3,05	4,57	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	9,39	10,86	13,68	17,34	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	11,59	13,24	16,34	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42
80	53,54	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	01,88	06,63	112,33
90	61,75	69,13	73,29	80,62	89,33	98,64	07,56	13,14	18,14	124,12
100	70,06	77,93	82,36	90,13	99,33	109,14	18,50	24,34	29,56	135,81