Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

19. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ: ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

19.1. Однофакторная модель

Пусть имеются данные по живой массе 18 поросят трех опытных групп при кормлении разными рационами - R (см. также [70,122,138,152]):

	Рацион			Итого
	R_1	R_2	R_3	
Живая масса поросят (y_{ij})	3	5	7	-
	5	6	6	-
	6	2	4	-
	2	7	3	-
	-	8	6	-
	-	3	4	-
	-	9	-	-
	-	8	-	-
Сумма:	16	48	30	94
Число поросят:	4	8	6	n=18
Среднее:	4	6	5	5,222

Данные описывают однофакторной моделью:

$$y_{ij} = \mu + r_i + e_{ij},$$

где y_{ij} - живая масса j-го поросенка, получавшего i-ой рацион;
μ - общее среднее;
r_i - эффект i-го рациона ($i=1,...,p$);
e_{ij} - случайная ошибка, специфическая для j-го поросенка ($j=1,...,n_i$, причем n_i-есть число животных в i-ой группе).

Анализ данных

Разложение суммы квадратов:

- общая $SS_y = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 3^2 + 5^2 + ... + 6^2 + 4^2 = 568.$

- для μ $SS_\mu = \dfrac{y_{..}^2}{n} = \dfrac{94^2}{18} = 490{,}8888;$

- SS_y скорр. $SS_y^* = SS_y - SS_\mu = 568 - 490{,}8888 = 77{,}1112;$

- для r $SS_r = \sum_i \dfrac{y_{i.}^2}{n_{i.}} - SS_\mu = \dfrac{16^2}{4} + \dfrac{48^2}{8} + \dfrac{30^2}{6} - 490{,}8888 =$

$$= 502 - 490{,}8888 = 11{,}1112;$$

- остаточная $SS_e = SS_y - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}} = 568 - 502 = 66$.

Проверка: $SS_y^* = SS_r + SS_e = 11{,}1112 + 66 = 77{,}1112$.

Число степеней свободы для:

- $SS_y \rightarrow df_y = n = 18$;
- $SS_y^* \rightarrow df_y^* = n - 1 = 18 - 1 = 17$;
- $SS_\mu \rightarrow df_\mu = 1$;
- $SS_r \rightarrow df_r = p - 1 = 3 - 1 = 2$;
- $SS_e \rightarrow df_e = n - p = 18 - 3 = 15$.

Коэффициент детерминации (и сила влияния фактора):

$$R^2 = \frac{SS_r}{SS_y^*} \times 100 = \frac{11{,}1112}{77{,}1112} \times 100 = 14{,}4\% = \eta^2.$$

Корреляционное отношение:

$$\eta = \sqrt{0{,}144} = 0{,}379.$$

Средние квадраты:

- $MS_r = SS_r / df_r = 11{,}1112 / 2 = 5{,}5556$;
- $MS_e = SS_e / df_e = 66 / 15 = 4{,}4$.

Критерий Фишера:

Для $\alpha=0{,}05$, при $df_1=df_r=2$ и $df_2=df_e=15 \rightarrow F_{0,05;2,15}=3{,}7$ (Табл.А.10).

$$F_{факт} = \frac{MS_r}{MS_e} = \frac{5{,}5556}{4{,}4} = 1{,}263\ ;\quad F_{факт} < F_{0,05;2,15} \rightarrow H_0 \text{ принимается.}$$

Результаты анализа сведены в табл. 39.

39. Результаты дисперсионного анализа по однофакторной модели фиксированного типа

Источник изменчивости	df	SS	η^2, %	MS	F-критерий
Общая	18	568,0000		-	-
Среднее	1	490,8888		-	-
Общая скорр.	17	77,1112	100,0	-	-
Рацион (R)	2	11,1112	14,4	5,5556	1,263 n.s.
Остаток (е)	15	66,0000	85,6	4,4000	-
R^2 = 14,4%					

Примечание. n.s. - статистически не значимо (не существенно, не достоверно); влияние рациона на живую массу поросят не установлено.

Оценка μ, r_i ***и*** μ_i, ***если*** r_i ***фиксированный эффект***:

$$\hat{\mu}=[16/4+48/8+30/6]/3=5; \quad m_{\hat{\mu}}=\sqrt{\frac{4{,}4}{18}}=0{,}49;$$

$$\hat{r}_1=16/4-5=-1; \quad \hat{\mu}_1=\hat{\mu}+\hat{r}_1=5+(-1)=4; \quad m_{\hat{\mu}_1}=\sqrt{\frac{4{,}4}{4}}=1{,}05;$$

$$\hat{r}_2=48/8-5=+1; \quad \hat{\mu}_2=\hat{\mu}+\hat{r}_2=5+(+1)=6; \quad m_{\hat{\mu}_2}=\sqrt{\frac{4{,}4}{8}}=0{,}74;$$

$$\hat{r}_3=30/6-5=0; \quad \hat{\mu}_3=\hat{\mu}+\hat{r}_3=5+(0)=5; \quad m_{\hat{\mu}_3}=\sqrt{\frac{4{,}4}{6}}=0{,}86.$$

Стандартную ошибку для различия между средними, например, $\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2=(\hat{\mu}+\hat{r}_1)-(\hat{\mu}+\hat{r}_2)=\hat{r}_1-\hat{r}_2$, рассчитывают из

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\hat{\sigma}_e^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)4{,}4}=\pm1{,}28.$$

Оценка σ_e^2 ***и*** σ_r^2, ***если*** r_i ***рандомизированный эффект***

В табл. 40 даны результаты дисперсионного анализа с математическим ожиданием средних квадратов - E(MS), где k при σ_r^2 равно:

$$k=\frac{n-\dfrac{\sum n_i^2}{n}}{p-1}=\frac{18-\dfrac{8^2+6^2+4^2}{18}}{3-1}=5{,}7778.$$

40. Результаты дисперсионного анализа по однофакторной модели рандомизированного типа

Источник изменчивости	df	SS	MS	F-критерий	E(MS)
Общая	18	568,0000	-	-	-
Среднее	1	490,8888	-	-	-
Общая скорр.	17	77,1112	-	-	-
Рацион (R)	2	11,1112	5,5556	1,263 n.s.	$\sigma_e^2+5{,}7778\,\sigma_r^2$
Остаток (e)	15	66,0000	4,4000	-	σ_e^2
R^2 = 14,4%					

Приравнивание MS_r и MS_e к математическим ожиданиям, E(MS):

$$MS_r=\sigma_e^2+5{,}7778\,\sigma_r^2 \quad \text{и}$$

$$MS_e=\sigma_e^2.$$

Решение уравнений дает оценки искомых варианс:

$$\hat{\sigma}_e^2 = MS_e = 4{,}4\,\text{кг}^2 \quad \text{и}$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{MS_r - MS_e}{5{,}7778} = \frac{5{,}5556 - 4{,}4}{5{,}7778} = 0{,}2\,\text{кг}^2$$

Коэффициент внутриклассовой корреляции (сила влияния):

$$\hat{r}_w = \frac{\hat{\sigma}_r^2}{\hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_e^2} =$$

$$= \frac{0{,}2}{0{,}2 + 4{,}4} = 0{,}0435\text{, или } 4{,}4\%.$$

Теперь допустим, что R это не рационы, а производители (S) и анализируемые поросята - их полусибсы. Тогда $\hat{\sigma}_r^2 = \hat{\sigma}_s^2 = ¼$ аддитивной генетической вариансы (σ_A^2), из которой можно получить оценку коэффициента наследуемости живой массы поросят ($\hat{h}^2$):

$$\hat{h}^2 = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_p^2} =$$

$$= 4\,\frac{\hat{\sigma}_s^2}{\hat{\sigma}_s^2 + \hat{\sigma}_e^2} =$$

$$= 4\,\hat{r}_w =$$

$$= 4 \times \frac{0{,}2}{0{,}2 + 4{,}4} =$$

$$= 4 \times 0{,}0435 = 0{,}174.$$

Стандартная ошибка $\hat{h}^2$:

$$m_{\hat{h}^2} = \sqrt{\frac{32 \times \hat{h}^2}{k \times p}} =$$

$$= \sqrt{\frac{32 \times 0{,}174}{5{,}7778 \times 3}} \approx \pm 0{,}5668.$$

Общая запись:

$$\hat{h}^2 \pm m_{\hat{h}^2} = 0{,}174 \pm 0{,}5668.$$

19.2. Двухфакторная модель

Пусть имеются данные по живой массе 18 поросят, от трех производителей (S); поросята содержались на двух рационах (R):

	R_1			R_2			Итого
	S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3	
Живая масса поросят (y_{ijk})	5	2	3	2	8	4	-
	6	3		3	8	4	-
		5			9	6	-
		7				7	-
		6				6	-
$y_{ij.}$ (сумма)	11	23	3	5	25	27	94
$n_{ij.}$ (число)	2	5	1	2	3	5	n=18
$n_{ij.}^2$	4	25	1	4	9	25	68
$y_{i..}$ (сумма по s_i)	16		48		30		
$n_{i..}$ (число)	4		8		6		
$n_{i..}^2$	16		64		36		116
$y_{.j.}$ (сумма по r_i)	37			57			
$n_{.j.}$ (число)	8			10			
$n_{.j.}^2$	64			100			164

Эти данные можно анализировать различными моделями.

19.2.1. Модель с взаимодействием

Биометрическая модель:

$$y_{ijk} = \mu + s_i + r_j + (sr)_{ij} + e_{ijk} \quad \text{или}$$

$$y = \mu + s + r + s \times r + e,$$

$$i = 1,\ 2,\ 3;$$
$$j = 1,\ 2;$$
$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij.};$$

где y_{ijk} - живая масса k-го поросенка, на j-ом рационе, от i-го отца;

μ - общее среднее;

s_i - эффект i-го отца;

r_j - эффект j-го рациона;

$(sr)_{ij}$ - эффект взаимодействия

e_{ijk} - случайная ошибка.

41. Алгоритм дисперсионного анализа по 2-х факторной модели с взаимодействием (метод I Henderson'a по Harvey W.R.,1966)

Источник изменчивости	df	Сумма квадратов, SS	E(MS)
Общая не скорректированная	n	$SS_y = \sum_{ijk} y_{ijk}^2$	-
Среднее	1	$SS_\mu = y_{...}^2 / n$	-
Общая скорректир. на μ	n-1	$SS_y^* = SS_y - SS_\mu$	-
Фактор S	p-1	$SS_s = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{n_{i..}} - SS_\mu$	$\sigma_e^2 + k_7\sigma_{sr}^2 + k_8\sigma_r^2 + k_9\sigma_s^2$
Фактор R	q-1	$SS_r = \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{n_{.j.}} - SS_\mu$	$\sigma_e^2 + k_4\sigma_{sr}^2 + k_5\sigma_r^2 + k_6\sigma_s^2$
Взаимодействие S×R	r-p-q+1	$SS_{sr} = \sum_{ij} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij.}} - \sum_i \frac{y_{i..}^2}{n_{i..}} - \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{n_{.j.}} + SS_\mu$	$\sigma_e^2 + k_1\sigma_{sr}^2 + k_2\sigma_r^2 + k_3\sigma_s^2$
Остаток (ошибка)	n-r	$SS_e = SS_y - \sum_{ij} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij.}}$	σ_e^2

Примечание. r - число заполненных клеток в таблице p×q (для примера r=3×2=6).

Анализ данных

Разложение суммы квадратов:

$$SS_y = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 5^2 + 6^2 + \ldots + 7^2 + 6^2 = 568;$$

$$SS_\mu = \frac{y_{...}^2}{n} = \frac{94^2}{18} = 490{,}8889;$$

$$SS_y^* = SS_y - SS_\mu = 568 - 490{,}8889 = 77{,}1111;$$

$$SS_s = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{n_{i..}} - SS_\mu = \frac{16^2}{4} + \frac{48^2}{8} + \frac{30^2}{6} - 490{,}8889 =$$
$$= 502 - 490{,}8889 = 11{,}1111;$$

$$SS_r = \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{n_{.j.}} - SS_\mu = \frac{37^2}{8} + \frac{57^2}{10} - 490{,}8889 =$$
$$= 496{,}025 - 490{,}8889 = 5{,}1361;$$

$$SS_{sr} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij.}} - \sum_i \frac{y_{i..}^2}{n_{i..}} - \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{n_{.j.}} + SS_\mu =$$

$$= \frac{11^2}{2} + \frac{23^3}{5} + \ldots + \frac{25^2}{3} + \frac{27^2}{5} - 502 - 496{,}025 + 490{,}8889 =$$

$$= 541{,}9333 - 502 - 496{,}025 + 490{,}8888 = 34{,}7972$$

$$SS_e = SS_y - \sum_i \sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij.}} = 568 - 541{,}9333 = 26{,}0667$$

Проверка:

$$SS_s + SS_r + SS_{sr} + SS_e = SS_y^* = 11{,}1111 + 5{,}1361 + 34{,}7972 + 26{,}0667 = 77{,}1111.$$

Число степеней свободы для:

$SS_y \ \rightarrow \ df_y = N = 18$;

$SS_y^* \ \rightarrow \ df_y^* = N - 1 = 18 - 1 = 17$;

$SS_\mu \ \rightarrow \ df_\mu = 1$;

$SS_s \ \rightarrow \ df_s = p - 1 = 3 - 1 = 2$;

$SS_r \ \rightarrow \ df_r = q - 1 = 2 - 1 = 1$;

$SS_{sr} \ \rightarrow \ df_{sr} = r - p - q + 1 = 6 - 3 - 2 + 1 = 2$;

$SS_e \ \rightarrow \ df_e = N - r = 18 - 6 = 12$.

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_e}{SS_y^*} = 1 - \frac{26{,}0667}{77{,}1112} = 0{,}662.$$

Сила влияния и корреляционное отношение:

$\eta_s^2 = SS_s / SS_y^* = 11{,}1111 / 77{,}1111 = 0{,}144 \quad \rightarrow \quad \eta_s = \sqrt{0{,}144} = 0{,}379$;

$\eta_r^2 = SS_r / SS_y^* = 5{,}1361 / 77{,}1111 = 0{,}067 \quad \rightarrow \quad \eta_r = \sqrt{0{,}067} = 0{,}258$;

$\eta_{sr}^2 = SS_{sr} / SS_y^* = 34{,}7972 / 77{,}1111 = 0{,}451 \quad \rightarrow \quad \eta_{sr} = \sqrt{0{,}451} = 0{,}672$;

$\eta_e^2 = SS_e / SS_y^* = 26{,}0667 / 77{,}1111 = 0{,}338 \quad \rightarrow \quad \eta_e = \sqrt{0{,}338} = 0{,}581$.

Средний квадрат:

$MS_s = SS_s / dfs_r = 11{,}1111 / 2 = 5{,}5556$;

$MS_r = SS_r / df_r = 5{,}1361 / 1 = 5{,}1361$;

$MS_{sr} = SS_{sr} / df_{sr} = 34{,}7972 / 2 = 17{,}3986$;

$MS_e = SS_e / df_e = 26{,}0667 / 12 = 2{,}1722$.

Критерий Фишера:

Для α=0,05, при $df_1=df_r=2$ и $df_2=df_e=12 \rightarrow F_{0,05;\,2,12}=3{,}9$ (табл.А.10).

$$F_s=\frac{MS_s}{MS_e}=\frac{5{,}5556}{2{,}1722}=2{,}558$$

$$F_r=\frac{MS_r}{MS_e}=\frac{5{,}1361}{2{,}1722}=2{,}364\ .$$

$$F_{sr}=\frac{MS_{sr}}{MS_e}=\frac{17{,}3986}{2{,}1722}=8{,}010\ .$$

Результаты анализа дисперсии сведены в табл. 42.

42. Результаты дисперсионного анализа по двухфакторной модели с взаимодействием

Источник изменчивости	df	SS	η^2 ,%	MS	F-критерий
Общая	18	568,0000	-	-	-
Среднее	1	490,8888	-	-	-
Общая скорр.	17	77,1112	100,0	-	-
S	2	11,1112	14,4	5,5556	2,558 n.s.
R	1	5,1361	6,7	5,1361	2,364 n.s.
S×R	2	34,7972	45,1	17,3986	8,010
Остаток (ошибка)	12	26,0667	33,8	2,1722	-
R^2 = 66,2%					

Оценка σ_e^2, σ_s^2, σ_r^2, σ_{sr}^2, ***если эффекты s и r рандомизированные:***

k-коэффициенты в столбце E(MS) табл. 41.

Формулы расчета:

$$k_1=\frac{1}{r-p-q+1}\left(n-\sum_i\frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}}-\sum_j\frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}}+\frac{\sum_i\sum_j n_{ij.}^2}{n}\right);$$

$$k_2=\frac{1}{r-p-q+1}\left(\frac{\sum_j n_{.j.}^2}{n}-\sum_i\frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}}\right);$$

$$k_3=\frac{1}{r-p-q+1}\left(\frac{\sum_i n_{i..}^2}{n}-\sum_j\frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}}\right);$$

$$k_4 = \frac{1}{q-1}\left(\sum_j \frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}} - \frac{\sum_i \sum_j n_{ij.}^2}{n}\right);$$

$$k_5 = \frac{1}{q-1}\left(n - \frac{\sum_j n_{.j.}^2}{n}\right);$$

$$k_6 = \frac{1}{q-1}\left(\sum_j \frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}} - \frac{\sum_i n_{i..}^2}{n}\right);$$

$$k_7 = \frac{1}{p-1}\left(\sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}} - \frac{\sum_i \sum_j n_{ij.}^2}{n}\right);$$

$$k_8 = \frac{1}{p-1}\left(\sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}} - \frac{\sum_j n_{.j.}^2}{n}\right);$$

$$k_9 = \frac{1}{p-1}\left(N - \frac{\sum_i n_{i..}^2}{n}\right).$$

Элементы, необходимые для расчета k-коэффициентов:

$$\sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}} = \frac{2^2+2^2}{4} + \frac{5^2+3^2}{8} + \frac{1^2+5^2}{6} = 10{,}5833;$$

$$\sum_j \frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}} = \frac{2^2+5^2+1^2}{8} + \frac{2^2+3^2+5^2}{10} = 7{,}5500;$$

$$\frac{\sum_i n_{i..}^2}{n} = \frac{4^2+8^2+6^2}{18} = 6{,}4444;$$

$$\frac{\sum_j n_{.j.}^2}{n} = \frac{8^2+10^2}{18} = 9{,}1111;$$

$$\frac{\sum_i \sum_j n_{ij.}^2}{n} = \frac{2^2+2^2+5^2+3^2+1^2+5^2}{18} = 3{,}778.$$

Расчет девяти k-коэффициентов:

$$k_1 = \frac{1}{2}(18 - 10{,}5833 - 7{,}5500 + 3{,}7778) = 1{,}8222;$$

$$k_2 = \frac{1}{2}(9{,}1111 - 10{,}5833) = -0{,}7361;$$

$$k_3 = \frac{1}{2}(6{,}4444 - 7{,}5500) = -0{,}5528;$$

$$k_4 = \frac{1}{1}(7{,}5500 - 3{,}7778) = 3{,}7722;$$

$$k_5 = \frac{1}{1}(18 - 9{,}1111) = 8{,}8889;$$

$$k_6 = \frac{1}{1}(7{,}5500 - 6{,}4444) = 1{,}1056;$$

$$k_7 = \frac{1}{2}(10{,}5833 - 3{,}7778) = 3{,}4028;$$

$$k_8 = \frac{1}{2}(10{,}5833 - 9{,}1111) = 0{,}7361;$$

$$k_9 = \frac{1}{2}(18 - 6{,}4444) = 5{,}7778.$$

Средние квадраты приравнивают к математическим ожиданиям. Решение результирующих уравнений дает:

$$\hat{\sigma}_e^2 = 2{,}172, \qquad \hat{\sigma}_r^2 = -2{,}087,$$
$$\hat{\sigma}_{sr}^2 = 6{,}593, \qquad \hat{\sigma}_s^2 = -3{,}031.$$

Взятая для примера выборка была очень маленькая и сильно несбалансированная. Поэтому получены отрицательные значения $\hat{\sigma}_r^2$ и $\hat{\sigma}_s^2$. Оценки имеют большую стандартную ошибку, но они будут несмещенными, если все эффекты, кроме μ, будут рандомизированными.

Следует отметить, что в фиксированных моделях MS_e отождествляют с фенотипической вариансой, скорректированной на систематические эффекты ($\hat{\sigma}_P^2$). В рандомизированных моделях $\hat{\sigma}_P^2$ получают из суммирования вариансных компонент:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \hat{\sigma}_s^2 + \hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_{sr}^2 + \hat{\sigma}_e^2.$$

19.2.2. Модель без взаимодействия

Если дисперсионный анализ показал, что эффект взаимодействия факторов статистически не значимый, то тогда его можно игнорировать и биометрическая модель будет иметь вид:

$$y_{ijk} = \mu + s_i + r_j + e_{ijk}.$$

В этом случае сумма квадратов, обусловленная взаимодействием (SS_{sr}), включается (суммируется) в остаточную сумму квадратов (SS_e) и $df_e = n - p - q + 1$. Результаты дисперсионного анализа живой массы 18 поросят по двухфакторной модели без взаимодействия представлены в табл. 43.

43. Дисперсионный анализ по двухфакторной модели без взаимодействия

Источник изменчивости	d.f.	SS	η^2,%	MS	F	E(MS)
Общая	18	568,0000	-	-	-	
Среднее	1	490,8888	-	-	-	
Общая скорр.	17	77,1112	100,0	-	-	
S	2	11,1112	14,4	5,5556	1,278 n.s.	$\sigma_e^2 + k_2\sigma_s^2$
R	1	5,1361	6,7	5,1361	1,181 n.s.	$\sigma_e^2 + k_1\sigma_r^2$
Остаток (ошибка)	14	60,8639	78,9	4,3474	-	σ_e^2
R^2 = 21,1%						

Оценка σ_e^2, σ_s^2, σ_r^2, ***если s и r рандомизированные:***

k-коэффициенты столбца E(MS) табл. 43:

$$k_1 = \frac{1}{q-1}\left(n - \sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2-1}\left(18 - \frac{2^2+2^2}{4} - \frac{5^2+3^2}{8} - \frac{1^2+5^2}{6}\right) = 7{,}417;$$

$$k_2 = \frac{1}{p-1}\left(n - \sum_j \frac{\sum_i n_{ij.}^2}{n_{.j.}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3-1}\left(18 - \frac{2^2+5^2+1^2}{8} - \frac{2^2+3^2+5^2}{10}\right) = 5{,}225.$$

Средние квадраты приравнивают к математическим ожиданиям. Решение уравнений дает:

$$\hat{\sigma}_e^2 = 4{,}347\,;$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{5{,}1367 - 4{,}3474}{7{,}417} = 0{,}106\,;$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{5{,}5556 - 4{,}3474}{5{,}225} = 0{,}231\,.$$

Общую фенотипическую вариансу рассчитывают из отношения:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \hat{\sigma}_s^2 + \hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_e^2\,.$$

19.2.3. Модель с гнездовым эффектом

Допустим, что имеются данные по живой массе 18 поросят, от 6 хряков (фактор В), которые относятся к двум линиям (фактор А):

	A_1			A_2			Итого
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
Живая масса	5	2	3	2	8	4	-
поросят	6	3		3	8	4	-
(y_{ijk})		5			9	6	-
		7				7	-
		6				6	-
$y_{ij.}$ (сумма):	11	23	3	5	25	27	94
$n_{ij.}$ (число):	2	5	1	2	3	5	n=18
$n_{ij.}^2$	4	25	1	4	9	25	68
$y_{i..}$ (сумма):	37			57			
$n_{i..}$ (число):	8			10			
$n_{i..}^2$	64			100			164

Данные описываются иерархической моделью:

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk} \quad \text{или}$$

$$y = \mu + a + b(a) + e\,,$$

где a_i - эффект i-ой группы (градации) фактора А;

b_{ij} - эффект j-ой субгруппы фактора В внутри i-ой группы фактора А.

44. Алгоритм дисперсионного анализа по 2-х факторной иерархической модели рандомизированного типа

Источник изменчивости	df	Сумма квадратов, SS	Средний квадрат, MS	E(MS)
Общая не скорректированная	n	$SS_y = \sum_{ijk} y^2_{ijk}$	-	-
Среднее	1	$SS_\mu = y^2_{..}/n$	-	-
Общая скорректированная	n-1	$SS^*_y = SS_y - SS_\mu$	-	-
Фактор А	q-1	$SS_a = \sum_i \frac{y^2_{i..}}{n_{i.}} - SS_\mu$	$MS_a = \frac{SS_a}{df_a}$	$\sigma^2_e + k_2\sigma^2_{b(a)} + k_3\sigma^2_a$
Фактор В внутри фактора А	s-q	$SS_{b(a)} = \sum_{ij} \frac{y^2_{ij.}}{n_{ij}} - \sum_i \frac{y^2_{i..}}{n_{i.}}$	$MS_{b(a)} = \frac{SS_{b(a)}}{df_{b(a)}}$	$\sigma^2_e + k_1\sigma^2_{b(a)}$
Внутри градаций фактора В (ошибка)	n-s	$SS_e = SS_y - \sum_{ij} \frac{y^2_{ij.}}{n_{ij}}$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	σ^2_e

Примечание. q и s -число градаций факторов А и В соответственно.

Анализ данных

Разложение суммы квадратов:

$$SS_y = \sum_i \sum_j \sum_k y^2_{ijk} = 5^2 + 6^2 + \ldots + 7^2 + 6^2 = 568;$$

$$SS_\mu = \frac{y^2_{...}}{n} = \frac{94^2}{18} = 490{,}8889;$$

$$SS^*_y = SS_y - SS_\mu = 568 - 490{,}8889 = 77{,}1111;$$

$$SS_a = \sum_i \frac{y^2_{i..}}{n_{i..}} - SS_\mu = \frac{37^2}{8} + \frac{57^2}{10} - 490{,}8889 =$$
$$= 496{,}025 - 490{,}8889 = 5{,}1361;$$

$$SS_{b(a)} = \sum_i \sum_j \frac{y^2_{ij.}}{n_{ij.}} - \sum_i \frac{y^2_{i..}}{n_i} =$$
$$= \frac{11^2}{2} + \frac{23^3}{5} + \ldots + \frac{25^2}{3} + \frac{27^2}{5} - 496{,}025 =$$
$$= 541{,}9333 - 496{,}025 = 45{,}9083;$$

$$SS_e = SS_y - \sum_i \sum_j \frac{y^2_{ij.}}{n_{ij.}} = 568 - 541{,}9333 = 26{,}0667.$$

Проверка:

$$SS_y^* = SS_a + SS_{b(a)} + SS_e = 5{,}1361 + 45{,}9083 + 26{,}0667 = 77{,}1111.$$

Число степеней свободы для:

$$SS_y \rightarrow df_y = n = 18;$$

$$SS_y^* \rightarrow df_y^* = n - 1 = 18 - 1 = 17;$$

$$SS_\mu \rightarrow df_\mu = 1;$$

$$SS_a \rightarrow df_a = q - 1 = 2 - 1 = 1;$$

$$SS_{b(a)} \rightarrow df_{b(a)} = s - q = 6 - 2 = 4;$$

$$SS_e \rightarrow df_e = n - s = 18 - 6 = 12.$$

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_e}{SS_y^*} = 1 - \frac{26{,}0667}{77{,}1112} = 0{,}662 \quad \rightarrow \quad R = 0{,}814.$$

Сила влияния и корреляционное отношение:

$$\eta_a^2 = SS_a / SS_y^* = 5{,}1361 / 77{,}1111 = 0{,}067 \quad \rightarrow \quad \eta_a = \sqrt{0{,}067} = 0{,}258;$$

$$\eta_{b(a)}^2 = SS_{b(a)} / SS_y^* = 45{,}9083 / 77{,}1111 = 0{,}595 \rightarrow \quad \eta_{b(a)} = \sqrt{0{,}595} = 0{,}772;$$

$$\eta_e^2 = SS_e / SS_y^* = 26{,}0667 / 77{,}1111 = 0{,}338 \quad \rightarrow \quad \eta_e = \sqrt{0{,}338} = 0{,}581.$$

Средний квадрат:

$$MS_a = SS_a / df_a = 5{,}1361 / 1 = 5{,}1361;$$

$$MS_{b(a)} = SS_{b(a)} / df_{b(a)} = 45{,}9083 / 4 = 11{,}4771;$$

$$MS_e = SS_e / df_e = 26{,}0667 / 12 = 2{,}1722.$$

Критерий Фишера:

Для α=0,05, при df_1=df_a =1 и df_2=df_e =12 → $F_{0,05;1,12}$=4,8 (табл. А.10).

$$F_a = \frac{MS_a}{MS_e} = \frac{5{,}1361}{2{,}1722} = 2{,}364;$$

Для α=0,05, при df_1=$df_{b(a)}$ =4 и df_2=df_e =12→$F_{0,05;4,12}$=3,3 (табл. А.10).

$$F_{b(a)} = \frac{MS_{b(a)}}{MS_e} = \frac{11{,}4771}{2{,}1722} = 5{,}284.$$

Результаты анализа сведены в табл. 45.

45. Результаты дисперсионного анализа по двухфакторной иерархической модели

Источник изменчивости	df	SS	η^2 ,%	MS	F-критерий
Общая	18	568,0000	-	-	-
Среднее	1	490,8888	-	-	-
Общая скорр.	17	77,1112	100,0	-	-
A	1	5,1361	6,7	5,1361	2,364 n.s.
B(A)	4	45,9083	59,5	11,4771	5,284
Остаток (ошибка)	12	26,0667	33,8	2,1722	-
R^2 = 66,2%					

Оценка σ_e^2, σ_a^2, $\sigma_{b(a)}^2$, ***если A и B рандомизированные:***

k-коэффициенты в столбце E(MS) табл. 38.

Формулы расчета:

$$k_1 = \frac{1}{s-q}\left(n - \sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}}\right);$$

$$k_2 = \frac{1}{q-1}\left(\sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}} - \frac{\sum_i \sum_j n_{ij.}^2}{n}\right);$$

$$k_3 = \frac{1}{q-1}\left(n - \frac{\sum_i n_{i..}^2}{n}\right);$$

Элементы, необходимые для расчета k-коэффициентов:

$$\sum_i \frac{\sum_j n_{ij.}^2}{n_{i..}} = \frac{2^2+5^2+1^2}{8} + \frac{2^2+3^2+5^2}{10} = 7{,}5500;$$

$$\frac{\sum_i \sum_j n_{ij.}^2}{n} = \frac{2^2+2^2+5^2+3^2+1^2+5^2}{18} = 3{,}778;$$

$$\frac{\sum_i n_{i..}^2}{n} = \frac{8^2+10^2}{18} = 9{,}1111.$$

$$k_1 = \frac{1}{6-2}(18 - 7{,}5500) = 2{,}6125\,;$$

$$k_2 = \frac{1}{2-1}(7{,}550 - 3{,}778) = 3{,}7720\,;$$

$$k_3 = \frac{1}{2-1}(18 - 9{,}1111) = 8{,}8889\,.$$

Средние квадраты приравнивают к их математическим ожиданиям:

$$MS_e = \sigma_e^2\,;$$

$$MS_{b(a)} = \sigma_e^2 + k_1\sigma_{b(a)}^2\,;$$

$$MS_a = \sigma_e^2 + k_2\sigma_{b(a)}^2 + k_3\sigma_a^2\,.$$

Решение уравнений дает оценки вариансных компонентов:

$$\hat{\sigma}_e^2 = MS_e = 2{,}1722\,;$$

$$\hat{\sigma}_{b(a)}^2 = \frac{1}{k_1}[MS_{b(a)} - MS_e] = $$
$$= \frac{1}{2{,}6125}[11{,}4771 - 2{,}1722] =$$
$$= 3{,}56\,;$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{k_3}[MS_a - \frac{k_2}{k_1}MS_{b(a)} - (1 - \frac{k_2}{k_1})\,MS_e] =$$
$$= \frac{1}{8{,}8889}[5{,}1361 - \frac{3{,}7720}{2{,}6125}11{,}4771 - (1 - \frac{3{,}7720}{2{,}6125})2{,}1722] =$$
$$= -1{,}18\,.$$

Общая фенотипическая варианса:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_{b(a)}^2 + \hat{\sigma}_e^2\,.$$

Если фактор А фиксированный, то рассчитывают только k_1, σ_e^2 и $\sigma_{b(a)}^2$. Тогда фенотипическая варианса будет:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \sigma_{b(a)}^2 + \hat{\sigma}_e^2\,.$$

Смешанный тип модели часто используют для оценки популяционно-генетических параметров.

19.3. Анализ альтернативных признаков

В основе дисперсионного анализа альтернативных признаков (типа «да-нет») те же принципы, что и для количественных [147]. В табл. 46 дан алгоритм расчета по однофакторной модели (где y_{ij} - это значение признака у j-го животного в i-ой группе, например, полусибсов по отцу - фактор S).

46. Алгоритм дисперсионного анализа альтернативных признаков по однофакторной модели

Источник изменчивости	df	SS	MS	E(MS)
Между градациями фактора S	g-1	$SS_a = \sum_i n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$MS_a = \frac{SS_a}{df_a}$	$\sigma_e^2 + k\sigma_a^2$
Внутри градаций фактора S (ошибка)	n-g	$SS_e = \sum_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	σ_e^2
Общая	n-1	$SS_y = \sum_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{y})^2$	-	-

Варианса для альтернативных признаков есть $\sigma^2 = pq$, где p и q - доли особей с соответствующим исходом. Если n - общее число животных, a - число животных с наличием (+) и $b = n - a$ - с отсутствием (-) признака, то $p = a/n$, $q = b/n$. Тогда сумму квадратов в общем виде можно выразить формулой:

$$SS = n\sigma^2 = npq = n\frac{a}{n}\frac{b}{n} = ab/n.$$

При наличии g групп, имеются следующие данные:

Группа	Число животных	в т.ч. с исходом		Сумма квадратов
		«+»	«-»	
i	n_i	a_i	b_i	$a_i b_i / n_i$
1	n_1	a_1	b_1	$a_1 b_1 / n_1$
2	n_2	a_2	b_2	$a_2 b_2 / n_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
g	n_g	a_g	b_g	$a_g b_g / n_g$
Σ	n	A	B	γ

Из этих данных рассчитывают необходимые для однофакторного анализа суммы квадратов:

- общая $$SS_y = \frac{\sum_i a_i \sum_i b_i}{\sum_i n_i} = AB/n;$$
- остаточная $$SS_e = \sum_i \frac{a_i b_i}{n_i} = \gamma;$$
- факторная $$SS_s = AB/n - \gamma = SS_y - SS_e.$$

Пусть имеются данные по оплодотворяемости телок, дочерей 12 быков (табл. 47).

47. Оплодотворяемости телок в разрезе быков

Номер быка	Число телок	в т.ч. с исходом		Сумма квадратов	Частота «+»
		«+»	«-»		
i	n_i	a_i	b_i	$a_i b_i / n_i$	$a_i / n_i = p_i$
1	25	16	9	5,7600	0,6400
2	20	17	3	2,5500	0,8500
3	27	20	7	5,1852	0,7407
4	15	13	2	1,7333	0,8667
5	28	22	6	4,7143	0,7857
6	39	25	14	8,9744	0,6410
7	17	15	2	1,7647	0,8824
8	24	13	11	5,9583	0,5417
9	32	23	9	6,4688	0,7188
10	39	33	6	5,0769	0,8462
11	14	8	6	3,4286	0,5714
12	45	29	16	10,3111	0,6444
Σ	n=325	A=234	B=91	γ =61,9256	-

Результаты разложения суммы квадратов представлены в табл. 48.

48. Результаты дисперсионного анализа оплодотворяемости телок по однофакторной модели

Источник изменчивости	df	SS	η^2 ,%	MS	F-критерий
Общая скорр.	324	65,5200	100,0	-	-
Быки (фактор S)	11	3,5944	5,5	0,3268	1,652 n.s.
Остаток (ошибка)	313	61,9256	94,5	0,1978	-
R^2 = 5,5%					

Если модель рандомизированного типа, то

$$k = \frac{1}{g-1}\left(n - \frac{\sum_i n_{i.}^2}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{12-1}\left(325 - \frac{25^2 + 20^2 + ... + 14^2 + 45^2}{325} \right) =$$

$$= \frac{1}{11}\left(325 - \frac{9915}{325} \right) = 26{,}773 .$$

Средние квадраты приравнивают к математическим ожиданиям, что дает оценки вариансных компонентов (см. однофакторный анализ):

$$\hat{\sigma}_e^2 = MS_e = 0{,}1978 ;$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{MS_s - MS_e}{k} = \frac{0{,}3268 - 0{,}1978}{26{,}773} = 0{,}0048 .$$

Так как фактор S генетический (быки), то оценки $\hat{\sigma}_s^2$ и $\hat{\sigma}_e^2$ можно использовать для расчета внутриклассовой корреляции (r_w) и коэффициента наследуемости (h^2):

$$\hat{h}^2 = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_P^2} = \frac{4\hat{\sigma}_s^2}{\hat{\sigma}_s^2 + \hat{\sigma}_e^2} = 4\,\hat{r}_w =$$

$$= \frac{4 \times 0{,}0048}{0{,}0048 + 0{,}1978} = 4 \times 0{,}0237 = 0{,}095 \approx 0{,}1 .$$

Стандартная ошибка коэффициента наследуемости:

$$m_{\hat{h}^2} = \sqrt{\frac{32 \times \hat{h}^2}{k \times g}} = \sqrt{\frac{32 \times 0{,}1}{26{,}773 \times 12}} = 0{,}0998 \approx 0{,}1 .$$

Результаты дисперсионного анализа можно использовать для проверки методом χ^2 однородности (гомогенности) быков по оплодотворяющей способности дочерей ($H_0 : p_i = \bar{p}$, где $\bar{p} = A/n$):

$$\chi^2_{\text{гомогенности}} = N\frac{[AB/n - \gamma]}{AB/n} = 325\frac{3{,}5944}{65{,}52} = 17{,}83 .$$

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}05$ и $df = 12 - 1 = 11$ составляет 19,68 (табл. А.9 Приложения А). Хотя нулевую гипотезу не отвергают, но в 95 случаев из 100 она может быть ошибочной.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

19.4. Ковариационный анализ

Ковариационный анализ – это разложение на компоненты сопряженной фенотипической изменчивости двух признаков. Алгоритм ковариационного анализа данных очень схож с алгоритмом дисперсионного анализа. Различие заключается в том, что ***вместо сумм квадратов и средних квадратов, рассчитывают суммы произведений и средние произведения*** (табл. 49).

49. Алгоритм ковариационного анализа по однофакторной модели

Источник сопряженной изменчивости	df	Сумма произведений, СР	Среднее произведение, МСР	E(МСР)
Общая не скорректи-рованная	n	$CP_y = \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij}$	-	-
Среднее	1	$CP_\mu = (x_{..})(y_{..})/n$	-	-
Общая скорректи-рованная	n-1	$CP_y^* = CP_y - CP_\mu$	-	-
Между градациями фактора А	p-1	$CP_a = \sum_i \frac{x_{i.} y_{i.}}{n_i} - CP_\mu$	$MCP_a = \frac{CP_a}{df_a}$	$\sigma_{xy_e} + k\sigma_{xy_a}$
Внутри градаций фактора А (ошибка)	n-p	$CP_e = CP_y - \sum_i \frac{x_{i.} y_{i.}}{n_i}$	$MCP_e = \frac{CP_e}{df_e}$	σ_{xy_e}

Примечание. df - число степеней свободы; E(МСР) - математическое ожидание среднего произведения.

Если биометрическая модель включает только рандомизированный фактор, то основной задачей ковариационного анализа является оценка компонентов фенотипической ковариации, связанных с этими фактором. Компоненты ковариации, $\hat{\sigma}_{xy_e}$ и $\hat{\sigma}_{xy_a}$, получают путем приравнивания средних произведений к математическим ожиданиям:

$$MCP_a = \sigma_{xy_e} + k\sigma_{xy_a} \quad \text{и} \quad MCP_e = \sigma_{xy_e}.$$

Тогда

$$\hat{\sigma}_{xy_e} = MCP_e \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_{xy_a} = \frac{MCP_a - MCP_e}{k},$$

где k - средневзвешенное число животных в градациях фактора А:

$$k = \frac{n - \sum_i n_i^2 / n}{p - 1}.$$

Если $\hat{\sigma}_{xy_a} = \hat{\sigma}_{xy_s}$ - ковarианса признаков у полусибсов, обусловленная отцами, то можно рассчитать *генетическую* корреляцию между признаками ($\hat{r}_g$) и ее приблизительную ошибку ($m_{\hat{r}_g}$):

$$\hat{r}_g = \frac{\hat{\sigma}_{xy_S}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{x_S}\hat{\sigma}^2_{y_S}}} = \frac{\hat{\sigma}_{xy_S}}{\hat{\sigma}_{x_S}\hat{\sigma}_{y_S}};$$

$$m_{\hat{r}_g} \approx \sqrt{\frac{(1-\hat{r}^2_g)^2}{2\hat{h}^2_x\hat{h}^2_y} m_{\hat{h}^2_x} m_{\hat{h}^2_y}},$$

где $\hat{\sigma}^2_{x_S} = \hat{\sigma}^2_{x_a}$ и $\hat{\sigma}^2_{y_S} = \hat{\sigma}^2_{y_a}$ - вариансы между отцами по признакам *x* и *y*;

$\hat{h}^2_x$ и $\hat{h}^2_y$ - оценки коэффициентов наследуемости признаков;

$m_{\hat{h}^2_x}$ и $m_{\hat{h}^2_y}$ - ошибки оценок коэффициентов наследуемости.

Пусть имеются результаты измерения двух признаков X и Y у 15 потомков трех (=p) быков:

	Бык					
	S_1		S_2		S_3	
	x	y	x	y	x	y
Полусибсы	5	7	7	8	8	9
с признаками	7	8	6	10	7	8
x и *y*	9	12	8	13	9	10
	6	9	9	12	5	6
	5	6	-	-	6	7
	3	9	-	-	-	-

Эти данные описываются однофакторной моделью рандомизированного типа (см. 19.1). Требуется рассчитать генетическую корреляцию между признаками X и Y.

50. Результаты дисперсионного анализа по однофакторной модели (k=4,933)

Источник изменчивости	df	SS	MS	$\hat{\sigma}^2_S$
***Признак* X**				
Быки	2	7,500	3,750	**0,1548**
Остаточная	12	35,833	**2,986**	
***Признак* Y**				
Быки	2	18,683	9,342	**1,1123**
Остаточная	12	46,250	**3,854**	

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

51. Результаты ковариационного анализа по однофакторной модели

Источник изменчивости	df	СР	МСР	$\hat{\sigma}_{xy_s}$
Быки	2	6,667	3,333	**0,2027**
Остаточная	12	28,000	**2,333**	-

Расчет коэффициента наследуемости и ошибки:

- по признаку X

$$\hat{h}_x^2 = \frac{4\hat{\sigma}_{x_s}^2}{\hat{\sigma}_{x_s}^2 + \hat{\sigma}_{x_e}^2} = \frac{4 \times 0{,}1548}{0{,}1548 + 2{,}986} \approx 0{,}197,$$

$$m_{\hat{h}_x^2} = \sqrt{\frac{32 \times \hat{h}_x^2}{k \times p}} = \sqrt{\frac{32 \times 0{,}197}{4{,}933 \times 3}} \approx \pm 0{,}6526;$$

- по признаку Y

$$\hat{h}_y^2 = \frac{4\hat{\sigma}_{y_s}^2}{\hat{\sigma}_{y_s}^2 + \hat{\sigma}_{y_e}^2} = \frac{4 \times 1{,}1123}{1{,}1123 + 3{,}854} \approx 0{,}896;$$

$$m_{\hat{h}_y^2} = \sqrt{\frac{32 \times 0{,}896}{4{,}933 \times 3}} \approx \pm 1{,}3919.$$

Расчет коэффициента генетической корреляции и ошибки:

$$\hat{r}_g = \frac{\hat{\sigma}_{xy_s}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{x_s}^2 \hat{\sigma}_{y_s}^2}} = \frac{0{,}2027}{\sqrt{0{,}1548 \times 1{,}1123}} \approx +0{,}489;$$

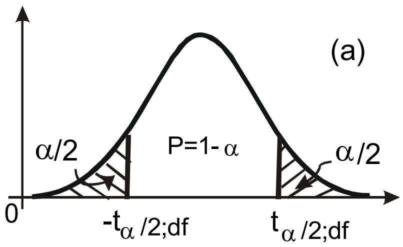
$$m_{\hat{r}_g} = \sqrt{\frac{(1 - \hat{r}_g^2)^2}{2\hat{h}_x^2 \hat{h}_y^2} m_{\hat{h}_x^2} m_{\hat{h}_y^2}} =$$

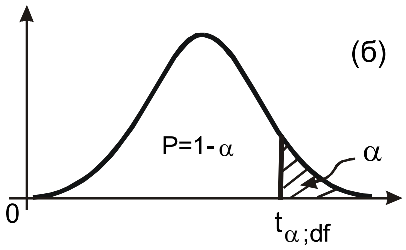
$$= \sqrt{\frac{(1 - 0{,}489^2)^2}{2 \times 0{,}197 \times 0{,}896} 0{,}6526 \times 1{,}3919} \approx$$

$$\approx \pm 1{,}221.$$

А.8. Критические значения t-распределения Стьюдента

(здесь и далее P - доверительная вероятность)



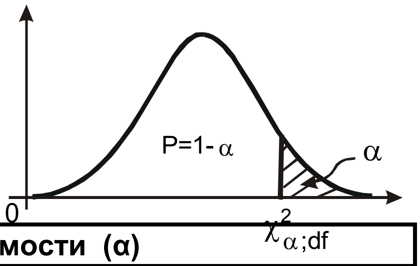


df	Уровень значимости (ошибка, α)				
	Двусторонняя критическая область (а)				
	0,100	**0,050**	**0,020**	**0,010**	**0,001**
	Односторонняя критическая область (б)				
	0,050	**0,025**	**0,010**	**0,005**	**0,0005**
1	6,314	12,706	31,821	63,657	637
2	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,690	2,030	2,432	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,408	2,704	3,551
50	1,676	2,008	2,384	2,678	3,496
100	1,661	1,982	2,360	2,625	3,390
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Примечание. В последней строке даны значения нормированной случайной величины $t = u \sim N(0;1)$.

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

А.9. Критические значения χ^2-распределения Пирсона

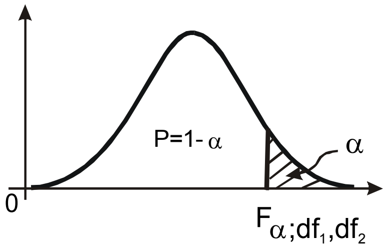


df	Уровень значимости (α)									
	0,99	**0,95**	**0,90**	**0,75**	**0,50**	**0,25**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,010**
1	…	…	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	***18,31***	20,48	23,21
11	3,05	4,57	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	9,39	10,86	13,68	17,34	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	11,59	13,24	16,34	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42
80	53,54	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	01,88	06,63	112,33
90	61,75	69,13	73,29	80,62	89,33	98,64	07,56	13,14	18,14	124,12
100	70,06	77,93	82,36	90,13	99,33	109,14	18,50	24,34	29,56	135,81

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

А.10. Критические значения F-распределения Фишера-Снедекора (α=0,05)

df_1 - число степеней свободы большего среднего квадрата (вариансы);
df_2 - число степеней свободы меньшего среднего квадрата.



df_2	Уровень значимости α=0,05												
	df_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,94	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,10	2,01	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,07	1,98	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,05	1,96	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,03	1,94	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,01	1,92	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	1,99	1,90	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	1,97	1,88	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,84	1,74	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,46	1,00

Из кн.: Кузнецов В.М. **Основы научных исследований в животноводстве.** Киров: Зональный НИИСХ Северо-Востока, 2006.- 568 с.

А.11. Критические значения F-распределения Фишера-Снедекора (α=0,01)

df_1 - число степеней свободы большего среднего квадрата (варианcы);
df_2 - число степеней свободы меньшего среднего квадрата (варианcы).

df_2	**Уровень значимости α=0,01**												
	df_1												
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**30**	**∞**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6209	6261	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,45	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,42	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,69	26,50	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,02	13,84	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,55	9,38	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,40	7,23	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,16	5,99	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,36	5,20	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,81	4,65	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,41	4,25	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,10	3,94	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	3,86	3,70	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,66	3,51	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,51	3,35	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,37	3,21	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,26	3,10	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,16	3,00	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,08	2,92	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,61	3,52	3,43	3,00	2,84	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	2,94	2,78	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	2,88	2,72	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	2,83	2,67	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	2,78	2,62	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	2,74	2,58	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,70	2,54	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,66	2,50	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,63	2,47	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,60	2,44	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,57	2,41	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,55	2,39	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,85	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,37	2,20	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,63	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,20	2,03	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,03	1,86	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	1,88	1,70	1,00