5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Матричная алгебра - это система обозначений для упрощения описаний множества чисел и символов. Матричная алгебра имеет такое же отношение к *скалярной* алгебре, как контейнерная перевозка грузов к традиционной перевозке. Матрица - это контейнер чисел. Как грузовой контейнер упрощает, ускоряет и делает более эффективным продвижение товаров, так и матрицы - упрощают и ускоряют движение чисел.

Биологические науки по своей сути числовые. Поэтому многие проблемы, например, в генетике количественных признаков, могут быть представлены в матричной формулировке. Теория матриц является математическим аппаратом, приспособленным к преобразованию и решению систем линейных уравнений, с помощью которых, в частности, производят многофакторные анализы популяций, расчеты племенной ценности животных, прогнозирование долгосрочных ответов на селекцию и инбридинг. Матричная алгебра значительно упрощает алгоритмизацию и программирование биометрических задач. В настоящее время матричная форма представления стала неотъемлемым средством в научной работе зарубежных исследователей, серьезно занимающихся вопросами животноводства (см. также [151,152]).

5.1. Типы матриц и векторов

Матрицы обозначают прописными символами. Матрица размером m на n есть прямоугольная таблица из m×n чисел или символов, представляющих числа, расположенные в определенном порядке в m строках и в n столбцах:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Число a_{ij}, стоящее на пересечении i-ой строки и j-го столбца, есть *элемент* матрицы A с номером ij. Для удобства матрица

А часто обозначается как А=$\{a_{ij}\}$. *Порядок* матрицы - это число строк и столбцов. Пример матрицы размера 2 на 3:

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=\{a_{ij}\}.$$

Матрица А имеет 2 строки и 3 столбца и, таким образом, содержит 2×3 элементов. *Квадратная* матрица имеет одинаковое число строк и столбцов:

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}.$$

Элементы q_{11}, q_{22}, ..., q_{nn} квадратной матрицы Q=$\{q_{ij}\}$ размера n×n называют диагональными элементами. *Симметричная* матрица – это квадратная матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой. Так как $q_{ij}=q_{ji}$, например $q_{31}=q_{13}=3$, то матрица Q является симметричной.

Если все недиагональные элементы матрицы D равны нулю, то D есть *диагональная* матрица:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Диагональную матрицу I размером n×n, все диагональные элементы которой равны 1, называют *тождественной* или *единичной* матрицей размера n×n:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю:

$$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Треугольная матрица – матрица, элементы которой под или над диагональю равны нулю:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Блочная матрица – матрица, элементами которой являются матрицы (блоки, субматрицы) меньшей размерности:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1\,p+1} & \cdots & a_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k\,1} & \cdots & a_{k\,p} & a_{k\,p+1} & \cdots & a_{k\,m} \\ \hline a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,p} & a_{k+1\,p+1} & \cdots & a_{k+1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,p} & a_{n\,p+1} & \cdots & a_{n\,m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right].$$

Векторы. Множество из n действительных чисел, записанных в определенном порядке в строку, называют n-мерным *вектор-строкой*:

$$x_n = x = [x_1, x_2, ..., x_n]; \quad b_3 = b = [4 \;\; 7 \;\; 2].$$

Множество из n действительных чисел, записанных в определенном порядке в столбец, называют n-мерным *вектор-столбцом*:

$$y_n = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \; a_3 = a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \; z_3 = z = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \; 1_4 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ - единичный вектор.}$$

Значения x_i и y_i называют i-ми элементами векторов x и y соответственно. Вектор представляет собой матрицу 1×n или n×1, т.е. матрицу, состоящую из одной строки или столбца. Векторы, как правило, обозначают *строчными* символами. Две n-мерных вектор-строки (вектор-столбца) считаются равными, если равны их соответствующие элементы. *Нулевой* вектор-строка (вектор-столбец) имеет все элементы равные нулю:

$$0 = (0, 0, ..., 0).$$

Пример 3-х мерной вектор-строки:

$$b = [4 \;\; 7 \;\; 2] = [b_1 \;\; b_2 \;\; b_3] = \{b_j\}.$$

Скаляр представляет собой матрицу 1×1, т.е. единственное число или символ, представляющий единственное число. Так, вектор **b** содержит три скаляра:

$$b_1=4; \quad b_2=7; \quad b_3=2.$$

Транспонированная матрица A' - это матрица, полученная путем замены в исходной матрице A строк на столбцы и наоборот:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, \qquad A'=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}.$$

Таким образом, *транспонирование* матрицы A состоит в переходе от нее к матрице A' (апостроф обозначает перестановку), строками которой являются столбцы матрицы A, а столбцами - ее строки. Если A является матрицей размером 2×3, то A' является матрицей размером 3×2. Если квадратная матрица, например, V симметричная, то V=V'.

Если вектор

$$x=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 7\end{bmatrix}, \text{ то } \quad x'=[2 \quad 4 \quad 7].$$

След матрицы представляет собой сумму диагональных элементов и обозначается как tr:

$$tr(Q)=tr\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}=1+4+6=11.$$

5.2. Операции с матрицами и векторами

Сложение и вычитание. Для сложения и вычитания матриц обе матрицы должны иметь одинаковое число строк и столбцов:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3 & 2+1 & 3+2\\ 4+3 & 5+2 & 6+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ 7 & 7 & 9\end{bmatrix},$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3 & 2-1 & 3-2\\ 4-3 & 5-2 & 6-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}.$$

Сложение (вычитание) векторов:

$$x+y=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=z.$$

Вектор $y=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_k x_k$ есть линейная комбинация векторов $x_1,\ x_2, \ldots x_k$, где α_i - скаляр (коэффициент).

Набор векторов $x_1,\ x_2, \ldots x_k$ является линейно зависимым, если

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_k x_k=0, \qquad \text{при } \alpha_i \neq 0.$$

В противном случае набор векторов линейно независим.

Умножение. Умножение матриц – это комбинация из сложения и умножения (каждый элемент производной матрицы является суммой произведений). Для умножения двух матриц число столбцов в первой матрице должно равняться числу строк во второй матрице. Элемент производной матрицы с субиндексом ij получают путем сложения произведений соответствующих элементов в i-ой строке первой и в j-ом столбце второй матрицы. Так, при умножении матрицы R, размером 3×2, на матрицу A, размером 2×2, получаем:

$$RA=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} r_{11}\times a_{11}+r_{12}\times a_{21} & r_{11}\times a_{12}+r_{12}\times a_{22} \\ r_{21}\times a_{11}+r_{22}\times a_{21} & r_{21}\times a_{12}+r_{22}\times a_{22} \\ r_{31}\times a_{11}+r_{32}\times a_{21} & r_{31}\times a_{12}+r_{32}\times a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}=C.$$

Пример:

$$\begin{array}{ccccccc} R & A & & & & M & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1+4 & 2+5 & 3+6 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 1+12 & 2+15 & 3+18 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 12 & 15 \\ 13 & 17 & 21 \end{bmatrix} & . \end{array}$$

Порядок умножения матриц является важным, так как RA≠AR (для квадратных матриц AB=BA):

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}}\underset{R}{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1+2+3 & 1+4+9\\4+5+6 & 4+10+18\end{bmatrix}=\underset{N}{\begin{bmatrix}6 & 14\\15 & 32\end{bmatrix}}.$$

Степень матрицы. Для квадратной матрицы A:

$A^3 = A \times A \times A$;

$A^0 = I$ (единичная), если A невырожденная;

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)A^q = A^{pq}$.

Умножение диагональных матриц:

$$DD=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\0 & d_2 & 0\\0 & 0 & d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\0 & d_2 & 0\\0 & 0 & d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1^2 & 0 & 0\\0 & d_2^2 & 0\\0 & 0 & d_3^2\end{bmatrix}=D^2.$$

Умножение матрицы на скаляр представляет особый случай. Так, если k-скаляр, а A - матрица 2×2, то:

$$kA=k\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\,a_{11} & k\,a_{12}\\k\,a_{21} & k\,a_{22}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, произведением матрицы на число k есть матрица, каждый элемент которой умножается на k.

Если D – диагональная матрица, то

$$Db=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 10 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}.$$

Умножение двух векторов дает *сумму произведений*:

$$a'\,b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{3} a_i' b_i = 1\times4+2\times5+3\times6=32.$$

Умножение вектора на самого себя дает *сумму квадратов*:

$$a'a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1^2+2^2+3^2=14.$$

Если a – вектор размером n×1, B – матрица размером n×n, то произведение $a'Ba$ есть скаляр:

$$a'Ba = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}&= 1\times1\times1+1\times2\times2+1\times3\times3+\\ &\quad +2\times2\times1+2\times4\times2+2\times5\times3+\\ &\quad +3\times3\times1+3\times5\times2+3\times6\times3 = 159.\end{aligned}$$

Пусть $a=1_3$ (единичный вектор), тогда:

$$a'b = [1 \;\; 1 \;\; 1]\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_i = 1\times4+1\times5+1\times6 = 15 \text{ - сумма;}$$

$$ab' = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}[4 \;\; 5 \;\; 6] = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \text{ - повторение строк;}$$

$$ba' = \begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}[1 \;\; 1 \;\; 1] = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ 5 & 5 & 5\\ 6 & 6 & 6\end{bmatrix} \text{ - повторение столбцов;}$$

$$a'Z = [1 \;\; 1 \;\; 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} = [12 \;\; 15 \;\; 18] \text{ - суммы по столбцам;}$$

$$Za = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 15\\ 24\end{bmatrix} \text{ - суммы по строкам;}$$

$$a'Za = [1 \;\; 1 \;\; 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = 45 \text{ - сумма всех элементов Z.}$$

В регрессионных анализах *независимые переменные* могут быть представлены матрицей X:

$$X = \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.$$

Суммы квадратов и суммы произведений можно выразить в виде матрицы S:

$$S=\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & \sum x_1x_3 & \dots \\ \sum x_2x_1 & \sum x_2^2 & \sum x_2x_3 & \dots \\ \sum x_3x_1 & \sum x_3x_2 & \sum x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

или в более простом виде:

$$S=X'X.$$

Инверсия. Деление является самой сложной операцией с матрицами. Матричный эквивалент для деления называют *инверсией* (обращение). Если рассматривать деление обычных чисел, как умножение одного числа на обратную величину другого, то тогда деление матриц является сходной операцией. Так, частное a:b можно представить как произведение (a)(1/b), что можно записать как (a)(b^{-1}). Число b^{-1} является обратной величиной (инверсией) b. Таким образом, деление матрицы A на матрицу B является, фактически, умножением матрицы A на обратную величину матрицы B и записывают как AB^{-1}. Поэтому деление матриц представляет собой двухступенчатую процедуру:

- сначала необходимо определить обратное значение одной матрицы,
- затем умножить эту обратную матрицу на оригинальную матрицу.

Только *квадратные* матрицы могут быть инвертированы.

Обратная матрица P является другой матрицей, такой, что $PP^{-1}=P^{-1}P=I$ (единичная).

$$\text{Если } P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{то } P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Общий делитель $(ad-bc)$ является *детерминантом* (определителем) матрицы *второго* порядка P, а матрица $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ является *адъюнктом* матрицы P. Адъюнкт формируют путем замещения каждого элемента матрицы Р его *кофактором* и *транспонированием* полученной матрицы. Кофактор ij-го элемента Р равен $(-1)^{i+j}$ M_{ij}, где M_{ij} - *минор* этого элемента, т.е. детерминант матрицы, полученной путем исключения из матрицы Р строки и столбца, содержащих ij-ый элемент.

Если $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$, то инверсия Р равна

$$P^{-1}=\frac{1}{2\times 5-1\times 9}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Контроль:

$$P^{-1}P=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\times 2-1\times 9 & 5\times 1-1\times 5 \\ -9\times 2+2\times 9 & -9\times 1+2\times 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I.$$

В общем виде детерминант матрицы А (detA, |A| или Δ_A) размера n×n, как линейная комбинация детерминантов порядка (n-1)×(n-1), вычисляют следующим образом:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\,M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\,K_{1j},$$

где a_{1j} - *опорные* элементы первой строки; $M_{1j}=\det A_{1j}$ - детерминанты (миноры) порядка n-1, полученные из А исключением первой строки и j-го столбца (j=1, 2,…,n); A_{1j} - матрица порядка (n-1)×(n-1), полученная из А исключением первой строки и j-го столбца; $(-1)^{j+1}$ - корреспондирующий элемент (равен -1, когда j четное и +1, когда j нечетное); $K_{1j}=(-1)^{j+1}M_{1j}$ - алгебраические дополнения (кофакторы) к элементам первой строки detA.

Формула пригодна для вычисления детерминантов любого порядка. Тем самым detA можно выразить через детерминанты порядка n-2. Можно продолжить этот процесс, пока не придем к детерминантам второго порядка, которые определены непосредственно ($ad-bc$).

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\det A = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} \times 2 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= 1\times1(2\times4\text{-}3\times1)\text{-}1\times1(1\times4\text{-}2\times1)+1\times2(1\times3\text{-}2\times2) = 5\text{-}2\text{-}2 = 1.$$

Зная детерминант, рассчитывают обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} L',$$

где L – матрица кофакторов, полученная путем замены ij-го элемента исходной матрицы их кофакторами (K_{ij}):

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{и} \quad M_{ij} = \det A_{ij},$$

где A_{ij} - матрица, полученная путем исключения из матрицы A строки и столбца, содержащих ij-ый элемент.

Элементы (кофакторы) матрицы L:

$$K_{11} = (-1)^{1+1} \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^2 (2\times4 - 3\times1) = 5;$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^3 (1\times4 - 2\times1) = -2;$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^2 (1\times3 - 2\times2) = -1;$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^3 (1\times4 - 3\times2) = 2;$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^4 (1\times4 - 2\times2) = 0;$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^5 (1\times3 - 2\times1) = -1;$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^4 (1\times1 - 2\times2) = -3;$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^5 (1\times1 - 1\times2) = 1;$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^6 (1\times2 - 1\times1) = 1.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Не у всех квадратных матриц есть обратные матрицы. Если детерминант матрицы равен нулю, то не может быть обратной матрицы. Такую матрицу называют особенной (вырожденной). Если детерминант не равен нулю, то обратная матрица возможна. Такую матрицу называют неособенной (невырожденной). Для любой квадратной матрицы с ненулевым детерминантом существует только одна обратная матрица.

Для диагональной матрицы D обратная матрица D^{-1} есть:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Инверсия - трудоемкий процесс. Поэтому для инвертирования матриц больших размеров применяют специальные алгоритмы и компьютерные программы.

Линейная независимость и ранг. Если детерминант матрицы равен нулю, то инверсии матрицы не существует. Детерминант всегда будет равен нулю, если исходная матрица содержит какие-либо строки или колонки, которые являются *линейной комбинацией* других строк или колонок матрицы. Например, в матрице

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

первая строка - сумма второй и третьей строк. Детерминант этой матрицы равен нулю. Следовательно, уникальная инверсия этой матрицы не существует.

Ранг матрицы (rgA) – это максимальное число *линейно независимых* в ней строк (столбцов). Максимальное число линейно независимых строк и столбцов во всякой матрице одинаково. Две матрицы A и B *эквивалентны* (A~B), если равны их ранги (rgA=rgB). Эквивалентные преобразования матрицы – это преобразования, не изменяющие ее ранга:

- перестановка строк (столбцов);
- умножение какой-либо строки или столбца на число $k \neq 0$;
- прибавление к какой-либо строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов).

Если ранг матрицы А меньше, чем ее порядок, то детерминант исходной матрицы всегда равен нулю, detA=0, и ее инверсия (A^{-1}) не существует. Такие матрицы называют матрицами *неполного ранга*.

5.3. Обобщенная инверсия

Несмотря на то, что уникальная инверсия для матрицы неполного ранга не существует, такая матрица обладает *обобщенной* инверсией. Обобщенная инверсия должна удовлетворять следующему равенству:

$$A A^{-} A = A,$$

где А - исходная матрица; A^{-} - обобщенная инверсия. Обобщенная инверсия не является уникальной. Для матрицы неполного ранга существует множество обобщенных инверсий, удовлетворяющих необходимому равенству. В этом случае для набора линейных уравнений

$$A x = r$$

существует множество решений, которые обозначаются $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots$.

Один из способов нахождения обобщенной инверсии. Пусть имеется матрица

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

для которой необходимо определить обобщенную инверсию. Этапы:

1. Определяют субматрицу полного ранга (М)

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Находят инверсию матрицы M

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{bmatrix}.$$

3. Формируют обобщенную инверсию путем замены элементов матрицы A соответствующими элементами матрицы M^{-1} и обнуления остальных элементов:

$$A^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/1 \end{bmatrix}.$$

В статистических анализах используют матрицы, представляющие собой произведение транспонированной матрицы на исходную, типа $X'X$. Такие матрицы всегда симметричны и для них справедливо равенство:

$$X(X'X)^{-}X' = X.$$

То есть, несмотря на существование множества обобщенных инверсий матрицы $X'X$, любая обобщенная инверсия, предумноженная на X и умноженная на X', дает ту же матрицу X.

5.4. Блочные матрицы

Матрицы можно разбить на блоки (субматрицы):

$$Q = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Эти блоки используют, как если бы они были обычными элементами матрицы **Q**, для разных операций при условии, что соблюдаются общие правила матричной алгебры. При выполнении операций блоки должны быть согласованы по размерам для соответствующих действий (сложения, перемножения матриц):

$$k\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} k\,A & k\,B \\ \hdashline k\,C & k\,D \end{array}\right], \quad \text{где} \quad k - \text{скаляр};$$

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} K & L \\ \hdashline M & N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A+K & B+L \\ \hdashline C+M & D+N \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} K & L \\ \hdashline M & N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} AK+BM & AL+BN \\ \hdashline CK+DM & CL+DN \end{array}\right];$$

$$A\,[B_1\ \ B_2\ \ B_3] = [AB_1\ \ AB_2\ \ AB_3];$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} [B_1\ \ B_2\ \ B_3] = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \end{bmatrix};$$

$$[A_1\ \ A_2] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = [A_1B_1 + A_2B_2].$$

Обращение блочных матриц. Пусть M – квадратная блочная матрица размером n×n, состоящая из блоков A, B, C и D

$$M = \left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right],$$

где A – квадратная матрица размером p×p; D - квадратная матрица размером q×q (p+q=n).

Тогда

° если существует A^{-1}, то

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} A^{-1} + A^{-1}BQCA^{-1} & -A^{-1}BQ \\ \hdashline -QCA^{-1} & Q \end{array}\right],$$

где $Q = (D - CA^{-1}B)^{-1}$;

° если существует D^{-1}, то

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} R & -RBD^{-1} \\ \hdashline -D^{-1}CR & D^{-1} + D^{-1}CRBD^{-1} \end{array}\right],$$

где $R = (A - BD^{-1}C)^{-1}$.

Если матрица M *симметричная*

$$M = M' = \left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline B' & D \end{array}\right], \quad \text{то} \quad M^{-1} = (M^{-1})' = \left[\begin{array}{c:c} X & Y \\ \hdashline Y' & W \end{array}\right].$$

Причем,

° если существует A^{-1}, то

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} A^{-1} - YB'A^{-1} & -A^{-1}BW \\ \hdashline (-A^{-1}BW)' & (D - B'A^{-1}B)^{-1} \end{array}\right];$$

° если существует D^{-1}, то

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} (A - BD^{-1}B')^{-1} & -XBD^{-1} \\ \hdashline (-XBD^{-1})' & D^{-1} - Y'BD^{-1} \end{array}\right].$$

5.5. Общие правила матричной алгебры

1. Для сложения и вычитания размеры матриц должны быть равными. A+B=B+A; (A+B)+C=A+(B+C); A+0=A; A+(-1)A=0.
2. Для умножения матриц их внутренние размеры должны быть идентичными. Внешние размеры дают размер производной матрицы:

$$\underset{p\times q}{A} \times \underset{q\times r}{B} = \underset{p\times r}{C}.$$

3. В общем случае AB ≠ BA (если матрицы не квадратные).
4. Если k скаляр, то kA = Ak.
5. k(AB) = (kA)B = A(kB) = A(Bk).
6. k(A+B)=kA+kB.
7. (k+μ)A=kA+μA.
8. (kμ)A=k(μA)=μ(kA).
9. A(B + C) = AB + AC.
10. (B + C)A = BA + CA.
11. ABC = (AB)C = A(BC).
12. A0=0.
13. 0B=0.
14. IA=AI=A, где I – здесь и далее единичная матрица.
15. Если A и B диагональные матрицы, то AB=C является также диагональной матрицей.
16. (A')' = A.
17. (A+B)' = A'+B'.
18. (AB)' = B'A'.
19. (kA)' = kA'.
20. Если A – симметричная матрица, то A'=A.
21. Для любой матрицы A (A'A) и (AA') всегда симметрические.
22. $I^{-1} = I$.
23. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.
24. $(A^{-1})^{-1} = A$.
25. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.
26. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ при условии, что A и B неособенные.
27. Детерминантом A является detA. Если detA=0, то A является особенной и не имеет обратной матрицы.
28. det(AB)=detA·detB.
29. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
30. tr(AB) = tr(BA).
31. tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA).
32. rgA = rgA′ = rg(A′A) = rg(AA′).